Concursul de Matematică Upper.School Ediția 2020

Etapa I

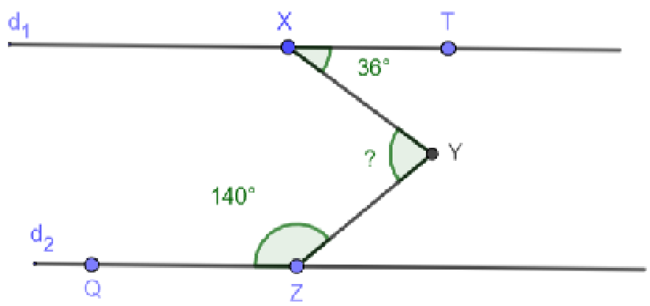
Clasa a-VI-a

29 ianuarie 2020

§1 Soluții

Problema 1

În figura de mai jos, dreptele d_1 și d_2 sunt paralele, punctul $X \in d_1, T \in d_1, Q \in d_2, Z \in d_2$, iar Y este un punct situat în zona delimitată de cele două drepte astfel încât m$(\angle TXY) = 36°$ și m$(\angle QZY) = 140°$. Care este mărimea unghiului $\angle XYZ$?



Demonstrație. Dacă ducem o paralelă prin punctul Y la dreptele d_1 și d_2, obținem: $m(\angle XYZ) = m(\angle TXY) + 180° - m(\angle QZY) = \boxed{76°}$.

Răspuns: $\boxed{76}$ .... $10p$

□

Problema 2

Un număr $\overline{abc}$ se numește "misterios" dacă restul împărțirii lui a la b este 1.

a) Dacă $a < b$, câte numere "misterioase" există?

b) Dacă $a > b$, câte numere "misterioase" există?

c) Care este cel mai mare număr "misterios" divizibil cu 6?

Demonstrație. a) Dacă $a < b$, $a : b = 0$ *rest* a. Restul 1 implică $a = 1$ și $2 \leq b$. Astfel b poate lua 8 valori: $\{2, 3, 4..., 9\}$, iar c ia 10 valori. Există $1 \cdot 8 \cdot 10 = \boxed{80}$ de numere "misterioase" cu $a < b$.
b) Dacă $a > b$ atunci $a : b = d$ *rest* 1 cu $d \neq 0$ și $b > 1$.

$$b = 2 \implies a = 2d + 1 \implies a \in \{3, 5, 7, 9\}$$

$$b = 3 \implies a = 3d + 1 \implies a \in \{4, 7\}$$

$$b = 4 \implies a = 4d + 1 \implies a \in \{5, 9\}$$

$$b = 5 \implies a = 5d + 1 \implies a = 6$$

$$b = 6 \implies a = 6d + 1 \implies a = 7$$

$$b = 7 \implies a = 7d + 1 \implies a = 8$$

$$b = 8 \implies a = 8d + 1 \implies a = 9$$

În această situație c poate lua 10 valori și avem: $10 \cdot (4 + 2 + 2 + 4) = \boxed{120}$ de numere "misterioase".
c) Pentru a fi cel mai mare număr "misterios" $\overline{abc}$ este de forma $\overline{98c}$. Pentru a fi divizibil cu 6, numărul trebuie să fie divizibil cu 2 și 3. Numărul este divizibil cu 2 dacă c este o cifră pară, adică $c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Numărul este divizibil cu 3 dacă suma cifrelor reprezintă un număr divizibil cu 3. Găsim astfel $c = 4$ și $\overline{abc} = \boxed{984}$.

Răspuns:

a) $\boxed{80}$ .... $3p$

b) $\boxed{120}$ .... $3p$

c) $\boxed{984}$ .... $4p$

□

Problema 3

Rezolvați fiecare dintre următoarele cerințe:

a) x și y sunt numere raționale astfel încât x este $p\%$ din y și y este $4p\%$ din x. Care este valoarea lui p?

b) Cu numerele $1, 2, 3, ..., 26$ scriem 13 fracții, în care aceste numere apar exact o singură dată fie la numărător, fie la numitor. Care este cel mai mare număr de fracții care au ca valoare un număr natural?

Demonstrație. a)

$$x = \frac{p}{100} \cdot y$$

$$y = \frac{4p}{100} \cdot x$$

Înmulțind cele 2 relații avem:

$$xy = \frac{4p^2}{10000} \cdot xy \implies p^2 = 2500 \implies p = \boxed{50}$$

b) Doar unul dintre numerele $17, 19, 23$ poate fi pe o fracție cu numitorul 1, pe celelalte două le grupăm și vor determina o fracție care nu dă număr natural. Celelalte $\boxed{12}$ fracții se pot grupa ca să aibă valoarea numere naturale:

$$\frac{17}{1}, \frac{14}{2}, \frac{15}{3}, \frac{12}{4}, \frac{25}{5}, \frac{24}{6}, \frac{21}{7}, \frac{16}{8}, \frac{18}{9}, \frac{20}{10}, \frac{22}{11}, \frac{26}{13}, \frac{\mathbf{23}}{\mathbf{19}}$$

Răspuns:

a) $\boxed{50}$ 5*p*

b) $\boxed{12}$ 5*p*

□

Problema 4

Fie numărul $N = 2020^a + 2020^b + 2020^c$, unde a, b, c sunt numere naturale prime consecutive al căror produs este cel mai mic număr natural de 4 cifre cu ultima cifră nenulă.

a) Să se determine numărul de divizori naturali ai numărului $a \cdot b \cdot c$.

b) Să se determine numărul de divizori naturali ai numărului $a \cdot b \cdot c + 23$

Demonstrație. *a*) $a \cdot b \cdot c$ are $2 \cdot 2 \cdot 2 = \boxed{8}$ divizori
b) $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \implies abc + 23 = 1024 = 2^{10}$. Acest număr are $\boxed{11}$ divizori.

Răspuns:

a) $\boxed{8}$ 5*p*

b) $\boxed{11}$ 5*p*

□

Problema 5

Rezolvați fiecare dintre următoarele cerințe:

a) Fie numărul $n = \overline{1234...91011...192021}$. Care este suma cifrelor lui n?

b) Fie $A = 10^{2020} - 10^{2019} + 3 \cdot 10^{2018}$. Care este restul împărțirii lui A la 33?

Demonstrație. *a*) Suma cifrelor este: $45 + 45 + 15 = \boxed{105}$
b) $A = 10^{2018} \cdot (100 - 10 + 3) = (9 \cdot \underbrace{111\ldots11}_{2018} + 1) \cdot 93$

În mod evident $33 \mid 9 \cdot \underbrace{111\ldots11}_{2018}$. Prin urmare $A = M_{33} + 93 = M_{33} + \boxed{27}$.

Răspuns:

a) $\boxed{105}$ 5*p*

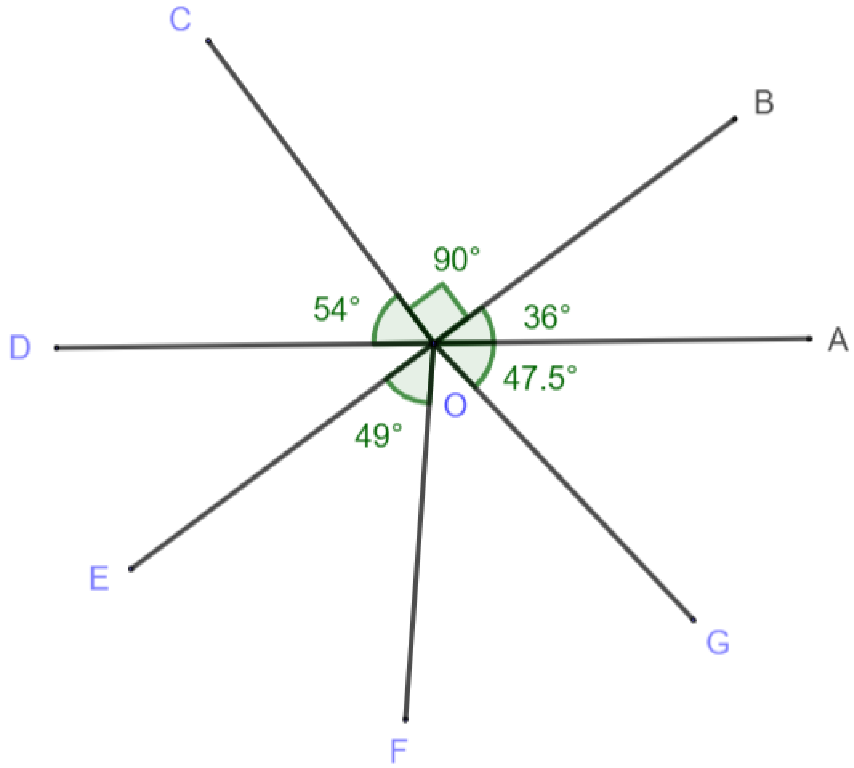
b) $\boxed{27}$ 5*p*

□

Problema 6

Semidreptele $[OA$, $[OB$, $[OC$, $[OD$, $[OE$, $[OF$ și $[OG$ sunt așezate în sens invers acelor de ceasornic, astfel încât $m(\angle AOB) = 36°$, $OC \perp OB$, $\angle COD$ e complementul lui $\angle AOB$, B, O, E sunt coliniare; $[OG$ e bisectoarea $\angle FOA$ și $m(\angle EOF)$ e cu $5°$ mai mică decât $m(\angle COD)$. Aflați $4 \cdot m(\angle GOA)$

Demonstrație. Avem $m(\angle COD) = 90° - 36° = 54°$. Așadar $m(\angle EOF) = 54° - 5° = 49°$. Din faptul că $B - O - E$ sunt coliniare avem: $m(\angle DOE) = 36°$. Din aceste relații avem: $m(\angle AOF) = 95° = 2m(\angle AOG) \implies 4m(\angle GOA) = \boxed{190°}$



Răspuns: $\boxed{190}$ .... $10p$

□

Problema 7

Scriem în ordine crescătoare toate numerele de patru cifre care au produsul cifrelor egal cu 0.

a) Care este al 10-lea număr din șir?

b) Pe ce loc este 2020 în șir?

c) Câte astfel de numere există?

Demonstrație. *a*) Răspunsul este $\boxed{1009}$.
b) Numerele de la 1000 la 1999 care au produsul cifrelor egal cu 0 sunt cele care au cel puțin o cifră egală cu 0. Numărăm numerele care nu au produsul cifrelor egal cu 0. Acestea sunt în număr de $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$, deci cele cu produsul cifrelor 0 sunt în număr de $1000 - 729 = 271$. Toate numerele de la 2000 la 2020 au produsul cifrelor egal cu 0,

adică 21 de numere. Astfel, 2020 este al $\boxed{292}$-lea număr.
c) Aplicând raționamentul de la punctul b), la fiecare mie, există 271 de astfel de numere. Atunci, avem $271 \cdot 9 = \boxed{2439}$ astfel de numere.

Răspuns:

a) $\boxed{1009}$ . . . . $3p$

b) $\boxed{292}$ . . . . $3p$

c) $\boxed{2439}$ . . . . $4p$

$\square$

Problema 8

Spunem că un an este "foarte par" dacă în scrierea sa apar patru cifre și toate aceste cifre sunt pare (spre exemplu 2000, 2002, 2004 sunt "foarte pare", iar 2010 nu este).

a) Care este cea mai mare distanță posibilă între doi ani "foarte pari' succesivi?

b) Este ușor de observat că distanța minimă între doi ani "foarte pari" succesivi este 2. Care este următoarea distanță, în ordinea crescătoare a distanțelor, între doi ani "foarte pari" succesivi?

Observație: Distanța dintre două numere este diferența pozitivă a acestora.

Demonstrație. *a*) Pentru diferența maximă trebuie să existe o diferență de ordinul miilor, adică doi ani de forma $\overline{axyz}$ și $\overline{(a+2)x_1y_1z_1}$. Diferența dintre acești ani este cel puțin 1001. Pentru aceeași cifră a miilor diferența este mai mică decât 1000. Numerele $\overline{(a+2)000}$ și $\overline{a888}$ sunt numere "foarte pare" succesive, iar diferența este $\boxed{1112}$.
b) Pentru ultima cifră 0, 2, 4 sau 6, numărul adunat cu 2 este tot "foarte par". Așadar, ultima sa cifră trebuie să fie 8. $\overline{abc8} + \boxed{12}$ este următorul an "foarte par".

Răspuns:

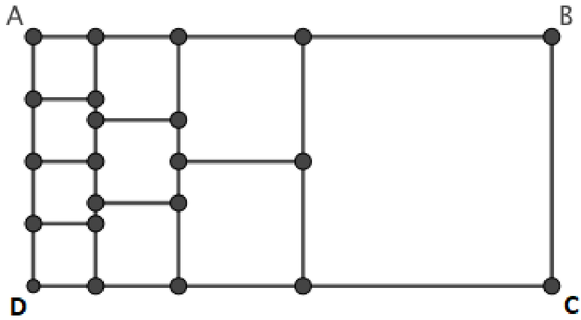
a) $\boxed{1112}$ . . . . $5p$

b) $\boxed{12}$ . . . . $5p$

$\square$

Problema 9

În figura de mai jos este desenat un dreptunghi care este împărțit în 10 pătrate. Determinați lungimea laturii [AB], dacă lungimile laturilor pătratelor sunt numere naturale și au cele mai mici valori posibile.



Demonstrație. Observăm că lungimea laturii mici a dreptunghiului $ABCD$ este divizibilă cu 3 și 4, deci cu 12. Astfel, este cel puțin 12, când latura pătratului cel mai mic este 3. Calculând celelalte laturi, obținem că latura AB este cel puțin $\boxed{25}$, aceasta fiind și valoarea minimă.

Răspuns: $\boxed{25}$ 10p

□

Problema 10

Numărul natural a are n cifre, iar a^5 are m cifre. Știind că $m + n = 2019$, care este valoarea lui $m - n$?

Demonstrație. Avem:

$$10^{n-1} \leq a < 10^n \implies 10^{5n-5} \leq a^5 < 10^{5n}$$

Cum, $10^{m-1} \leq a^5 < 10^m$ obținem:

$$10^{m-1} \leq a^5 < 10^{5n} \implies m - 1 < 5n$$

$$10^{5n-5} \leq a^5 < 10^m \implies 5n - 5 < m$$

Prin urmare $5n-5 < m < 5n+1 \implies 5n-5 < 2019-n < 5n+1 \implies 2018 < 6n < 2024$. Așadar $n = 337$ și $m = 1682$, de unde $m - n = \boxed{1345}$.

Răspuns: $\boxed{1345}$ 10p

□