Concursul de Matematică Upper.School Ediția 2020

Etapa I

Clasa a-VII-a

29 ianuarie 2020

§1 Soluții

Problema 1

Fie $A = \overline{0, a_1 a_2 ... a_n \ldots}$, reprezentarea zecimală a numărului $\frac{1}{6} + \frac{1}{13}$ și $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Calculați suma cifrelor numărului S_{2020}.

Demonstrație. $A = \frac{19}{78} = 0,2(435897)$

$$S_{2020} = 2 + \underbrace{(4+3+5+8+9+7)}_{336 \ ori} + 4 + 3 + 5 = 12110$$

Suma cifrelor acestui număr este $\boxed{5}$

Răspuns: $\boxed{5}$ .... $10p$

□

Problema 2

Câte triplete (x, y, z) îndeplinesc condiția:

$$\sqrt{\overline{xx} + \overline{yy} + \overline{zz}} \in \mathbb{N}?$$

Demonstrație. Avem că:

$$\overline{xx} + \overline{yy} + \overline{zz} = 11(x + y + z)$$

este pătrat perfect, de unde $x+y+z = 11k^2$ cu x, y, z cifre nenule, deci $3 \leq x+y+z \leq 27$. Astfel obținem $k = 1$.

$$x + y + z = 11$$

$$x = 9 \implies y = z = 1 \implies o\ soluție$$

$$x = 8 \implies 2\ soluții$$

$$x = 7 \implies 3\ soluții$$

$$\dots$$

$$x = 1 \implies 9 \text{ } soluții$$

În total sunt $\boxed{45}$ triplete.

Răspuns: $\boxed{45}$ .... $10p$

□

Problema 3

Care este ultima cifră a numărului:

$$S = [\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + [\sqrt{3 \cdot 4}] + ... + [\sqrt{2019 \cdot 2020}] \ ?$$

$[x]$ este partea întreagă a numărului x.

Demonstrație. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem: $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2 \implies n < \sqrt{n(n+1)} < n+1 \implies [\sqrt{n \cdot (n+1)}] = n \implies S = 1 + 2 + ... + 2019 = 2019 \cdot 1010$. Prin urmare ultima cifră este $\boxed{0}$.

Răspuns: $\boxed{0}$ .... $10p$

□

Problema 4

Fie $\triangle ABC$ isoscel cu $AB = AC$, AH înălțime, $H \in (BC)$, (MN) linie mijlocie, $M \in (AB), N \in (AC), AH \cap CM = \{P\}$. Calculați raportul dintre aria $\triangle ABC$ și aria $\triangle PNC$

Demonstrație. P este centru de greutate.

$$\implies MP = \frac{1}{3} \cdot CM; \ CP = \frac{2}{3} \cdot CM$$

Fie $R \in (CP)$ astfel încât $PR = RC$. Obținem că NR este mediană în $\triangle PNC \implies A_{PNR} = A_{RNC} = x$. În plus NP este mediană în $\triangle MNR \implies A_{MNP} = x \implies A_{MNC} = 3x$. Acum în $\triangle AMC$ avem MN mediană, deci $A_{AMC} = 6x \implies A_{ABC} = 12x$

$$\frac{A_{ABC}}{A_{PNC}} = \frac{12x}{2x} = \boxed{6}$$

Răspuns: $\boxed{6}$ .... $10p$

□

Problema 5

Fie numerele raționale $x_1, x_2, ..., x_n$ astfel încât $|x_k| \leq 1, k \in \{1, 2, ..., n\}$ și:

$$|x_1| + |x_2| + ... + |x_n| = 19 + |x_1 + x_2 + ... + x_n|$$

Care este cea mai mică valoare posibilă a lui n?

Demonstrație. $19 \leq 19 + |x_1 + x_2 + ... + x_n| = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \leq \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{n} = n$

Dacă $n = 19$ înseamnă că $x_1 + x_2 + ... + x_{19} = 0$ și $|x_1| = |x_2| = ... = |x_{19}| = 1$, adică avem o sumă de 19 numere impare egală cu 0, contradicție.
Dacă $n = 20$, putem alege: $x_1 = x_2 = ... = x_{10} = \frac{19}{20}$ si $x_{11} = x_{12} = ... = x_{20} = \frac{-19}{20}$
Numerele alese verifică, deci $n = \boxed{20}$

Observație: Din cauza unei erori de tehnoredactare, la această problemă s-a acordat punctaj maxim tuturor participanților.

Răspuns: $\boxed{20}$ .... $10p$

$\square$

Problema 6

Fie $\triangle ABC$ cu $m(\angle ABC) = 76°$, $m(\angle ACB) = 72°$ și punctele $M \in (AB)$, $P \in (AC)$ astfel încât $m(\angle ABP) = 22°$, $m(\angle ACM) = 44°$. Să se afle $m(\angle AMP)$.

Demonstrație. Din suma unghiurilor în triunghi obținem:

$$m(\angle BMC) = 180° - 28° - 76° = 76°$$

Obținem că $\triangle BMC$ este isoscel cu vârful C, adică $BC = MC$.

$$m(\angle BPC) = 180° - 54° - 72° = 54°$$

Astfel avem și $\triangle BPC$ isoscel cu $BC = CP$. Așadar $CM = CP \implies \angle CMP = 68°$.
Astfel $\angle BMP = 76° + 68° = 144° \implies \angle AMP = \boxed{36°}$

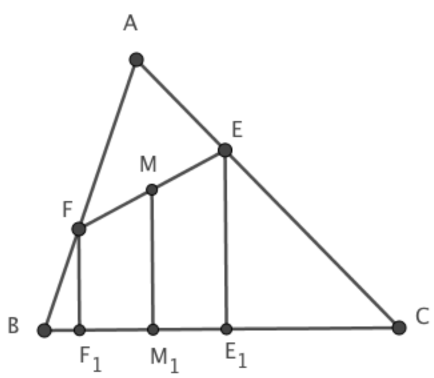
Răspuns: $\boxed{36}$ .... $10p$

$\square$

Problema 7

Fie triunghiul $\triangle ABC$, D, E, F, oarecare pe laturile BC, AC, respectiv AB și M, N, P mijloacele segmentelor EF, FD, respectiv DE.
Să se calculeze
$$\frac{2(A_{MBC} + A_{NAC} + A_{PAB})}{A_{ABC}}.$$

Demonstrație. Construim $FF_1 \perp BC$, $F_1 \in (BC)$, $EE_1 \perp BC$, $E_1 \in (BC)$ și $MM_1 \perp BC$, $M_1 \in (BC)$.



În trapezul FF_1E_1E, obținem $[MM_1]$ linie mijlocie $\implies MM_1 = \frac{EE_1+FF_1}{2}$.
Atunci,

$$A_{MBC} = \frac{BC \cdot MM_1}{2} = \frac{BC \cdot EE_1}{4} + \frac{BC \cdot FF_1}{4} = \frac{1}{2}\Big(A_{CBF} + A_{BEC}\Big).$$

Însumând cu celelalte 2 relațiile analoage obținem că

$$\frac{2(A_{MBC} + A_{NAC} + A_{PAB})}{A_{ABC}} = \boxed{3}.$$

Răspuns: $\boxed{3}$ .... $10p$

□

Problema 8

Aflați numărul de 4 cifre nenule $\overline{abcd}$ pentru care:

$$\frac{\overline{abcd}}{141} = \frac{\overline{bcda}}{299} = \frac{\overline{cdab}}{768} = \frac{\overline{dabc}}{1014}.$$

Demonstrație. Avem

$$\frac{\overline{abcd}}{141} = \frac{\overline{bcda}}{299} = \frac{\overline{cdab}}{768} = \frac{\overline{dabc}}{1014} = \frac{1111(a+b+c+d)}{2222} = \frac{a+b+c+d}{2}$$

$$\implies 2\overline{abcd} = 141(a+b+c+d)$$

Cum $a+b+c+d \leq 36$, obținem $\overline{abcd} \leq 141 \cdot 18 = 2538$, deci $a = 1$ sau $a = 2$.
Cum 3 divide 141, obținem că $3 \mid \overline{abcd} \implies 3 \mid a+b+c+d$. Asta implică $9 \mid \overline{abcd} \implies 9 \mid a+b+c+d$.
Știm că $0 < a+b+c+d \leq 29$, $a+b+c+d$ este par și divizibil cu 9. Atunci, $a+b+c+d = 18 \implies \overline{abcd} = \boxed{1269}$.

Răspuns: $\boxed{1269}$ .... $10p$

□

Problema 9

Rezolvați fiecare dintre următoarele cerințe:

a Care este valoarea numărului natural a știind că inecuația $\mid x - 11\sqrt{2} \mid \leq a$ are exact 11 soluții numere întregi negative.

b Pentru care valoare întreagă a lui x, expresia $E(x) = \mid x - 11\sqrt{2} \mid$ ia cea mai mică valoare?

Demonstrație. Cele 11 soluții întregi negative sunt $-1, -2, \ldots, -11$, în mod evident.
Pentru că $a + 11\sqrt{2} \geq x$ și $a + 11\sqrt{2} \geq 11\sqrt{2} > 15$, obținem că inecuația are și soluții pozitive. Cum -11 este cea mai mică soluție negativă, obținem că $a \geq 27$ și obținem $a = \boxed{27}$.
La punctul b), obținem că $15,55 < 11\sqrt{2} < 16$, deci pentru $\boxed{16}$ se obține cea mai mică valoare.

Răspuns:

a) $\boxed{27}$ 5p

b) $\boxed{16}$ 5p

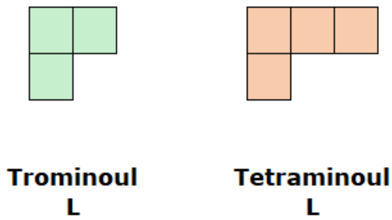
□

Problema 10

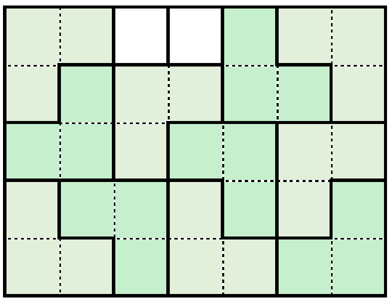
În figura de mai jos sunt prezentate două tipuri de piese: *trominoul L* și *tetraminoul L*.

a Care este cel mai mare număr de *trominouri L* care se pot așeza, fără să se suprapună, într-un dretunghi 5×7?

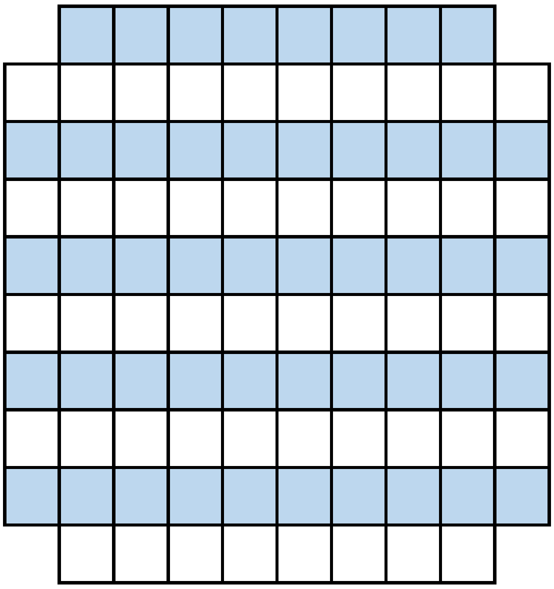
b Dintr-o tablă $n \times n$ se elimină colțurile. Dacă $n \in \{4, 8, 10, 12, 14\}$, care este cea mai mică valoare a lui n pentru care tabla rămasă poate fi acoperită în întregime cu *tetraminouri L*, fără ca acestea să se suprapună?



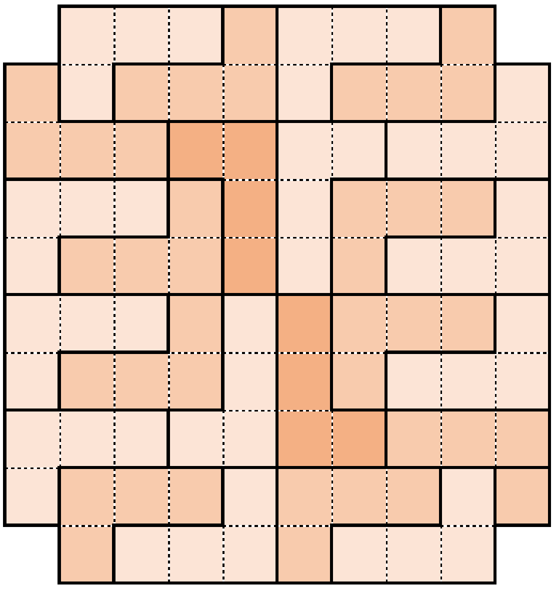
Demonstrație. a) Aria unui *trominou L* este egală cu 3 iar aria dreptunghiului este 35. Prin urmare numărul maxim de *trominouri L* care pot fi așezate este $\boxed{11}$. Un exemplu de acoperire este prezentat în figura de mai jos:



b) După eliminarea colțurilor, pe tablă sunt $n^2 - 4$ pătrățele. Întrucât un *tetraminou L* are 4 pătrățele, pentru a acoperi tabla rămasă cu *tetraminouri L* este necesar ca $4 \mid n^2 - 4 \implies n$ este par. Dar nu este suficient. Colorăm tabla astfel:



Un *tetraminou L* acoperă 3 pătrățele albe și unul albastru sau 1 pătrățel alb și 3 albastre. Dacă notăm cu x numărul de *tetraminouri L* de primul tip și cu y cele de al doiela tip atunci acestea acoperă $3x+y$ pătrățele albe și $x+3y$ pătrățele albastre. Deoarece pe tablă există un număr egal de pătrățele albe și albastre, obtinem $3x+y=x+3y \implies x=y$. Prin urmare există un număr par de *tetraminouri L* care se folosesc pentru a acoperi tabla. Adică $8 \mid n^2-4 \implies n=4k+2$. Cel mai mic număr $n \in \{4,8,10,12,14\}$ de forma $4k+2$ este $\boxed{10}$. Un exemplu de acoperire este prezentat în figura de mai jos:



Răspuns:

a) $\boxed{11}$ .... $3p$

b) $\boxed{10}$ .... $7p$

$\square$