Concursul de Matematică Upper.School Ediția 2020

Etapa I

Clasa a-VIII-a

29 ianuarie 2020

§1 Soluții

Problema 1

Aflați soluția în $\mathbb{Z}$ a ecuației:

$$\left[\frac{x+2}{3}\right]+\left[\frac{x+3}{4}\right]+\left[\frac{x+5}{6}\right]=8$$

Demonstrație.

$$\left[\frac{x+2}{3}\right] \leq \frac{x+2}{3} < \left[\frac{x+2}{3}\right]+1$$
$$\left[\frac{x+3}{4}\right] \leq \frac{x+3}{4} < \left[\frac{x+3}{4}\right]+1$$
$$\left[\frac{x+5}{6}\right] \leq \frac{x+5}{6} < \left[\frac{x+5}{6}\right]+1$$

Prin adunarea acestor relații avem:

$$8 \leq \frac{x+2}{3}+\frac{x+3}{4}+\frac{x+5}{6} < 11$$

Înmulțind această relație cu 12 obținem:

$$96 \leq 9x+27 < 132 \iff 69 \leq 9x < 105$$

Având în vedere faptul că $x \in \mathbb{Z}$ obținem $x \in \{8, 9, 10, 11\}$. Dintre acestea observăm că doar $x = \boxed{9}$ verifică.

Răspuns: $\boxed{9}$ .... $10p$

$\square$

Problema 2

Știind că $(x^2+4x+44)(y^2-6y+59)=2000$, calculați $(x\cdot y)^2$

Demonstrație.

$(x^2+4x+44)(y^2-6y+59)=(x^2+4x+4+40)(y^2-6y+9+50)=((x+2)^2+40)((y-3)^2+50)=2000$

Cum $(x+2)^2\geq 0$ si $(y-3)^2\geq 0$ avem:

$$((x+2)^2+40)((y-3)^2+50)\geq 40\cdot 50=2000$$

Prin urmare avem egalitate în inegalitățile de mai sus, deci $x=-2$ și $y=3$. Obținem astfel $(x\cdot y)^2=\boxed{36}$

Răspuns: $\boxed{36}$ .... $10p$

□

Problema 3

În cubul $ABCDA'B'C'D'$, $AB=2$ și $AD'\cap DA'=\{O\}$.

a) Care este măsura unghiului format de AD' si $A'B$?

b) Care este valoarea numărului:

$$\frac{1}{[\cos\angle(CO,AB')]^2}$$

Demonstrație. a) $\boxed{60}$
b) Fie $B'D'\cap A'C'=\{S\}$. Atunci avem că OS este linie mijlocie în $\triangle AD'B'$ cu $OS\parallel AB'$ și:

$$\angle(CO,AB')=\angle(CO,SO)=\angle COS$$

În $\triangle COS$ avem $SC=OC=\sqrt{6}$ și $SO=\frac{AB'}{2}=\sqrt{2}$. Acum cu Teorema cosinusului obținem:

$$CS^2=SO^2+CO^2-2SO\cdot CO\cdot\cos(\angle COS)\iff$$
$$\iff 6=6+2-2\sqrt{12}\cdot\cos(\angle COS)$$

De unde găsim $\cos(\angle COS)=\frac{1}{2\sqrt{3}}$ și prin urmare:

$$\frac{1}{[\cos\angle(CO,AB')]^2}=\boxed{12}$$

Răspuns:

a) $\boxed{60}$ .... $5p$

b) $\boxed{12}$ .... $5p$

□

Problema 4

Fie ecuația:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 19 = 4 \cdot |x-1| + 2|y-2| + 2(x+2y+3z)$$

cu $x, y, z \in \mathbb{R}$. Câte triplete (x, y, z) reprezintă "soluția" ecuației?

Demonstrație.

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 + 5 = 4 \cdot |x-1| + 2|y-2| \iff$$
$$(|x-1|)^2 - 4 \cdot |x-1| + 4 + (|y-2|)^2 - 2 \cdot |y-2| + 1 + (z-3)^2 = 0 \iff$$
$$(|x-1|-2)^2 + (|y-2|-1)^2 + (z-3)^2 = 0$$

De aici obținem $z = 3$ si $|x-1| = 2$, iar $|y-2| = 1$. Soluțiile sunt prin urmare:

$$(x; y; z) = \{(3; 3; 3), (3; 1; 3), (-1; 3; 3), (-1; 1; 3)\}$$

În total avem $\boxed{4}$ triplete.

Răspuns: $\boxed{4}$ .... $10p$

□

Problema 5

Să se găsească numărul de perechi (x, y) cu $x, y \in \mathbb{Z}_+$, nenule, pentru care numărul $N = 23x + 92y$ este un pătrat perfect mai mic sau egal cu 2391.

Demonstrație. Avem $N = 23(x + 4y)$ este pătrat perfect, iar 23 este număr prim deci:

$$N = 23^2m^2 \implies 23^2m^2 \leq 2391 \implies m^2 < 5 \implies m^2 \in \{0, 1, 4\}$$

Dacă $m = 0$ nu avem soluții pozitive. Dacă $m = 1$ avem $x = 23 - 4y$ cu $y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, prin urmare avem 5 perechi. Dacă $m = 2$ avem $x = 92 - 4y$ cu $y \in \{1, 2, ..., 22\}$, adică 22 perechi. În total sunt $\boxed{27}$ perechi.

Răspuns: $\boxed{27}$ .... $10p$

□

Problema 6

Rezolvați fiecare dintre următoarele cerințe:

a) Avem numerele x și y reale, nenule, cu proprietatea că $4(x-y)^2 = 9xy$. Care este valoarea expresiei $(4x - y)(4y - x)$?

b) Dacă x și y sunt numere reale strict pozitive cu $4(x-y)^2 = 9xy$ și $y \neq 4x$, iar a și b numere întregi, prime între ele, astfel încât:

$$\sqrt{\frac{12x + y}{4x + 9y}} = \frac{a}{b},$$

calculați valoarea expresiei $a^2 - b^2$.

Demonstrație. a) $4(x-y)^2 = 9xy \iff (4x-y)(x-4y) = 0$. Răspunsul este $\boxed{0}$.
b) Pentru că $y \neq 4x \implies x = 4y$. Atunci,

$$\sqrt{\frac{12x+y}{4x+9y}} = \sqrt{\frac{49y}{25y}} = \frac{7}{5}$$

În acest caz, $a^2 - b^2 = 49 - 25 = \boxed{24}$.

Răspuns:

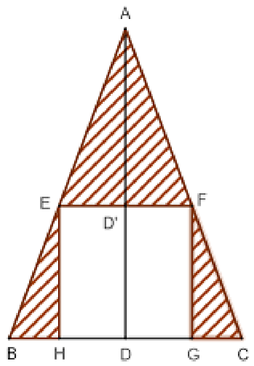
a) $\boxed{0}$ .... $5p$

b) $\boxed{24}$ .... $5p$

□

Problema 7

Într-un triunghi isoscel cu lungimea bazei 21 și lungimea înălțimii 28 înscriem un pătrat cu o latură pe baza triunghiului isoscel, ca în figură. Care este aria suprafeței hașurate?



Demonstrație. Din Teorema fundamentală a asemănării:

$$\triangle AD'E \sim \triangle ADB \implies \frac{AD'}{AD} = \frac{ED'}{BD} = \frac{2ED'}{2BD} = \frac{EF}{BC} \implies$$

$$\frac{AD'}{EF} = \frac{AD}{BC} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$$

Întrucât EFGH este pătrat obținem $AD' + EF = AD' + D'D = AD = 28 \implies EF = 12$ și $AD' = 16$. Calculând aria triunghiului și cea a pătratului și scăzându-le, obținem că aria suprafeței hașurate este $\boxed{150}$.

Observație: Din cauza unei erori de tehnoredactare (aria menționată în problemă nu era hașurată, ci colorată în roșu), la această problemă s-a acordat punctaj maxim tuturor participanților.

Răspuns: $\boxed{150}$ .... $10p$

□

Problema 8

Se știe că

$$25x^2 + 16y^2 - 30x + 16y + 8 = 0,$$

unde $x \in \mathbb{Z}$ și $y \in \mathbb{Q}$.

a) Care este valoarea numărului x?

b) Care este valoarea absolută a părții întregi a lui y?

Demonstrație. Ecuația se rescrie $(5x-3)^2 + (4y+2)^2 = 5$. Cum $(5x-3)^2 \in \mathbb{Z}$ și $0 \leq (5x-3)^2 \leq 5$, obținem că $x = \boxed{1}$.
Atunci $(4y+2)^2 = 1 \implies 4y+2 = \pm 1$, de unde y poate fi $-\frac{3}{4}$ sau $-\frac{1}{4}$, deci valoarea absolută a părții sale întregi este $\boxed{1}$.

Răspuns:

a) $\boxed{1}$ 5p

b) $\boxed{1}$ 5p

$\square$

Problema 9

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de muchie 32cm. Se consideră un punct T situat în interiorul cubului, la distanța de 16cm față de centrul cubului O. Prin O se duc cele trei plane paralele cu fețele cubului.

a) Să se calculeze suma pătratelor distanțelor de la T la cele trei plane.

b) Care este valoarea sumei pătratelor distanțelor de la T la cele șase fețe ale cubului?

Demonstrație. a) Pentru că T se află în interiorul cubului și $OT = \frac{AB}{2}$ se observă că OT nu este perpendiculară pe niciuna dintre fețele cubului; prin urmare punctul T nu face parte din niciunul dintre cele 3 plane paralele care trec prin O. Prin T ducem cele 3 plane paralele cu fețele cubului și în acest mod OT se "completează" la un paralelipiped dreptunghic în care OT este diagonală. Suma pătratelor celor 3 distanțe este pătratul diagonalei, adică $\boxed{256}$.
b) Repetând raționamentul de la punctul a) se obține că suma cerută este $TA^2 + TC'^2$. Aplicând formula medianei în triunghiul TAC' obținem că $TO^2 = \frac{2(TA^2+TC'^2)-AC'^2}{4} \iff$ $4 \cdot 16^2 = 2(TA^2 + TC'^2) - (32\sqrt{3})^2 \iff TA^2 + TC'^2 = \boxed{2048}$.

Răspuns:

a) $\boxed{256}$ 5p

b) $\boxed{2048}$ 5p

$\square$

Problema 10

Numerele întregi $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ verifică relațiile:

$$|a_1 - a_2| = 2\,|a_2 - a_3| = 2^2\,|a_3 - a_4| = \cdots = 2^{2019}\,|a_{2020} - a_1|$$

Știind că $a_{2020} = 2020$, care este media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$?

Demonstrație. Notăm valoarea comună a acestor nume cu k. Atunci:

$$a_1 - a_2 = \pm k$$
$$a_2 - a_3 = \pm \frac{k}{2}$$
$$a_3 - a_4 = \pm \frac{k}{2^2}$$
$$\ldots$$
$$a_{2020} - a_1 = \pm \frac{k}{2^{2019}}$$

Adunând relațiile obținem că:

$$0 = k(\pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2^2} \pm \cdots \pm \frac{1}{2^{2019}}) \iff$$

$$0 = k\left(\frac{\pm 2^{2019} \pm 2^{2018} \pm \cdots \pm 1}{2^{2019}}\right)$$

Pentru că suma $\pm 2^{2019} \pm 2^{2018} \pm \cdots \pm 1$ este impară $\implies k = 0$. Așadar $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2020} = 2020 \implies$ media lor aritmetică este $\boxed{2020}$.

Răspuns: $\boxed{2020}$ .... $10p$

$\square$