Concursul de Matematică
Upper.School
Ediția 2020

Etapa I

Clasa a-VII-a

29 ianuarie 2020

§1 Subiecte

Problema 1

Fie $A = \overline{0, a_1 a_2 ... a_n \ldots}$, reprezentarea zecimală a numărului $\frac{1}{6} + \frac{1}{13}$ și $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Calculați suma cifrelor numărului S_{2020}.

Problema 2

Câte triplete (x, y, z) îndeplinesc condiția:

$$\sqrt{\overline{xx} + \overline{yy} + \overline{zz}} \in \mathbb{N}?$$

Problema 3

Care este ultima cifră a numărului:

$$S = [\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + [\sqrt{3 \cdot 4}] + ... + [\sqrt{2019 \cdot 2020}] \ ?$$

$[x]$ este partea întreagă a numărului x.

Problema 4

Fie $\triangle ABC$ isoscel cu $AB = AC$, AH înălțime, $H \in (BC)$, (MN) linie mijlocie, $M \in (AB), N \in (AC), AH \cap CM = \{P\}$. Calculați raportul dintre aria $\triangle ABC$ și aria $\triangle PNC$

Problema 5

Fie numerele raționale $x_1, x_2, ..., x_n$ astfel încât $|x_k| \leq 1, k \in \{1, 2, ..., n\}$ și:

$$|x_1| + |x_2| + ... + |x_n| = 19 + |x_1 + x_2 + ... + x_n|$$

Care este cea mai mică valoare posibilă a lui n?

Problema 6

Fie $\triangle ABC$ cu $m(\angle ABC) = 76°,\ m(\angle ACB) = 72°$ și punctele $M \in (AB),\ P \in (AC)$ astfel încât $m(\angle ABP) = 22°,\ m(\angle ACM) = 44°$. Să se afle $m(\angle AMP)$.

Problema 7

Fie triunghiul $\triangle ABC$, D, E, F, oarecare pe laturile BC, AC, respectiv AB și M, N, P mijloacele segmentelor EF, FD, respectiv DE.
Să se calculeze

$$\frac{2(A_{MBC} + A_{NAC} + A_{PAB})}{A_{ABC}}.$$

Problema 8

Aflați numărul de 4 cifre nenule $\overline{abcd}$ pentru care:

$$\frac{\overline{abcd}}{141} = \frac{\overline{bcda}}{299} = \frac{\overline{cdab}}{768} = \frac{\overline{dabc}}{1014}.$$

Problema 9

Rezolvați fiecare dintre următoarele cerințe:

a Care este valoarea numărului natural a știind că inecuația $| x - 11\sqrt{2} | \leq a$ are exact 11 soluții numere întregi negative.

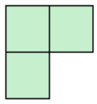
b Pentru care valoare întreagă a lui x, expresia $E(x) = | x - 11\sqrt{2} |$ ia cea mai mică valoare?

Problema 10

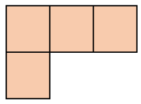
În figura de mai jos sunt prezentate două tipuri de piese: *trominoul L* și *tetraminoul L*.

a Care este cel mai mare număr de *trominouri L* care se pot așeza, fără să se suprapună, într-un dretunghi 5×7?

b Dintr-o tablă $n \times n$ se elimină colțurile. Dacă $n \in \{4, 8, 10, 12, 14\}$, care este cea mai mică valoare a lui n pentru care tabla rămasă poate fi acoperită în întregime cu *tetraminouri L*, fără ca acestea să se suprapună?



Trominoul L



Tetraminoul L