

# Concursul de Matematică Upper.School Ediția 2020 Etapa I

CLASA A-VIII-A

29 ianuarie 2020

## §1 Subiecte

### Problema 1

Aflați soluția în  $\mathbb{Z}$  a ecuației:

$$\left[ \frac{x+2}{3} \right] + \left[ \frac{x+3}{4} \right] + \left[ \frac{x+5}{6} \right] = 8$$

### Problema 2

Știind că  $(x^2 + 4x + 44)(y^2 - 6y + 59) = 2000$ , calculați  $(x \cdot y)^2$

### Problema 3

În cubul  $ABCD A' B' C' D'$ ,  $AB = 2$  și  $AD' \cap DA' = \{O\}$ .

- Care este măsura unghiului format de  $AD'$  și  $A'B$  ?
- Care este valoarea numărului:

$$\frac{1}{[\cos \angle(CO, AB')]^2}$$

### Problema 4

Fie ecuația:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 19 = 4 \cdot |x - 1| + 2|y - 2| + 2(x + 2y + 3z)$$

cu  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Câte triplete  $(x, y, z)$  reprezintă "soluția" ecuației?

### Problema 5

Să se găsească numărul de perechi  $(x, y)$  cu  $x, y \in \mathbb{Z}_+$ , nenule, pentru care numărul  $N = 23x + 92y$  este un pătrat perfect mai mic sau egal cu 2391.

### Problema 6

Rezolvați fiecare dintre următoarele cerințe:

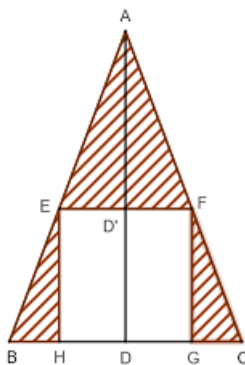
- Avem numerele  $x$  și  $y$  reale, nenule, cu proprietatea că  $4(x - y)^2 = 9xy$ . Care este valoarea expresiei  $(4x - y)(4y - x)$ ?
- Dacă  $x$  și  $y$  sunt numere reale strict pozitive cu  $4(x - y)^2 = 9xy$  și  $y \neq 4x$ , iar  $a$  și  $b$  numere întregi, prime între ele, astfel încât:

$$\sqrt{\frac{12x + y}{4x + 9y}} = \frac{a}{b},$$

calculați valoarea expresiei  $a^2 - b^2$ .

### Problema 7

Într-un triunghi isoscel cu lungimea bazei 21 și lungimea înălțimii 28 înscriem un pătrat cu o latură pe baza triunghiului isoscel, ca în figură. Care este aria suprafeței hașurate?



### Problema 8

Se știe că

$$25x^2 + 16y^2 - 30x + 16y + 8 = 0,$$

unde  $x \in \mathbb{Z}$  și  $y \in \mathbb{Q}$ .

- Care este valoarea numărului  $x$ ?
- Care este valoarea absolută a părții întregi a lui  $y$ ?

**Problema 9**

Fie  $ABCD A' B' C' D'$  un cub de muchie 32cm. Se consideră un punct  $T$  situat în interiorul cubului, la distanța de 16cm față de centrul cubului  $O$ . Prin  $O$  se duc cele trei plane paralele cu fețele cubului.

- a) Să se calculeze suma pătratelor distanțelor de la  $T$  la cele trei plane.
- b) Care este valoarea sumei pătratelor distanțelor de la  $T$  la cele șase fețe ale cubului?

**Problema 10**

Numerele întregi  $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$  verifică relațiile:

$$|a_1 - a_2| = 2 |a_2 - a_3| = 2^2 |a_3 - a_4| = \dots = 2^{2019} |a_{2020} - a_1|$$

Știind că  $a_{2020} = 2020$ , care este media aritmetică a numerelor  $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$ ?