Concursul de Matematică
Upper.School
Ediția 2020

Etapa II

Clasa a-V-a

26 februarie 2020

§1 Soluții

Problema 1

Spunem despre un număr că este *"rotund"* dacă suma cifrelor lui este un număr par.

a) Care este cel mai mare număr natural *"rotund"* scris cu trei cifre distincte în baza 10?

b) Câte numere naturale, mai mici sau egale cu 2020 sunt *"rotunde"*?

Demonstrație. *a*) Evident $\boxed{987}$.
b) Considerăm secvența de 10 numere consecutive:

$$\overline{a_1a_2...a_n0},\ \overline{a_1a_2...a_n1},\ \overline{a_1a_2...a_n2},\ ...,\ \overline{a_1a_2...a_n9}$$

Sumele cifrelor acestor numere sunt consecutive, prin urmare jumătate pare, jumătate impare. Prin urmare de la 0 la 2109 avem 1010 numere *"rotunde"* iar împreună cu numărul 2020 sunt în total $\boxed{1011}$ numere *"rotunde"*.

Răspuns:

a) $\boxed{987}$ . . . . $6p$

b) $\boxed{1011}$ . . . . $4p$

$\square$

Problema 2

Determinați cel mai mic număr natural cu proprietatea că suma resturilor obținute prin împartirea la $10, 12, 14, 16, 18, 20$ este egală cu 84?

Demonstrație. Notăm cu n numărul căutat. Din teorema împărțirii cu rest obținem că:

$$n = 10 \cdot k_1 + r_1,\ \ r_1 \leq 9$$

$$n = 12 \cdot k_2 + r_2,\ \ r_2 \leq 11$$

$$n = 14 \cdot k_3 + r_3,\ \ r_3 \leq 13$$

$$n = 16 \cdot k_4 + r_4,\ \ r_4 \leq 15$$

$$n = 18 \cdot k_5 + r_5,\ \ r_5 \leq 17$$

$$n = 20 \cdot k_6 + r_6,\ \ r_6 \leq 19$$

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 \leq 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 84$$

De unde obținem egalitățile $r_1 = 9$, $r_2 = 11$, $r_3 = 13$, $r_4 = 15$, $r_5 = 17$, $r_6 = 19$. Atunci obținem:

$$(n+1) = 10(k_1+1) = 12(k_2+1) = 14(k_3+1) = 16(k_4+1) = 18(k_5+1) = 20(k_6+1)$$

Prin urmare, obținem

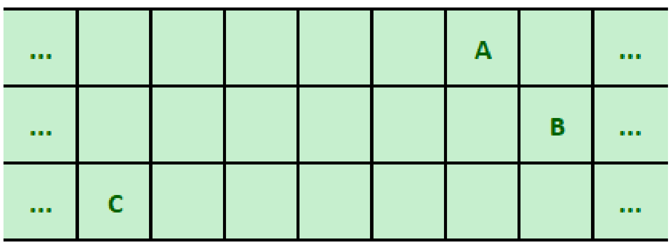
$$n + 1 = [10, 12, 14, 16, 18, 20] = 5040 \implies n = \boxed{5039}$$

Răspuns: $\boxed{5039}$ 10p

$\square$

Problema 3

În vestiarul școlii sunt 60 de dulapuri așezate pe trei rânduri. Dulapurile, pe fiecare rând, sunt numerotate de la stânga la dreapta cu numere de la 1 la 20 pe rândul de sus, de la 21 la 40 pe rândul din mijloc și de la 41 la 60 pe rândul de jos. Ana, Bogdan și Carla, elevi ai școlii, au dulapurile așezate ca în figură. Fiecare dintre cele trei numere corespunzătoare dulapurilor sunt divizibile cu numărul care reprezintă vârsta lui Dan, fratele geamăn al Carlei. Câți ani are Dan?



Demonstrație. Din figură putem deduce $B = A + 21$ și $C = B + 14 = A + 35$. Fie d vârsta lui Dan. Din faptul că $d \mid B = A + 21$ și $d \mid C = A + 35$, obținem că $d \mid 14$. Cum însă A și B au parități diferite și $d \mid A$ și $d \mid B$, obținem $d \in \{1, 7\}$. Întrucât Dan este fratele geamăn al Carlei iar Carla este elevă obținem că vârsta lui Dan este de $\boxed{7}$ ani.

Răspuns: $\boxed{7}$ 10p

$\square$

Problema 4

În câte moduri putem elimina câteva numere din șirul numerelor naturale cel mult egale cu 100 așa încât suma numerelor rămase să fie egală cu 5040? Atenție: eliminarea numerelor 0,4,6, este aceeași cu 6,0,4.

Demonstrație. Suma $0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = 5050$. Numerele eliminate trebuie să aibă suma 10. Grupurile de numere care ar putea fi eliminate sunt:

$$(10), (0, 10), (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (0, 1, 9), (0, 2, 8), (0, 3, 7), (0, 4, 6), (1, 2, 7), (1, 3, 6), (1, 4, 5),$$
$$(2, 3, 5), (0, 1, 2, 7), (0, 1, 3, 6), (0, 1, 4, 5), (0, 2, 3, 5), (1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 3, 4).$$

În total, $\boxed{20}$ variante posibile.

Răspuns: $\boxed{20}$ .... $10p$

□

Problema 5

Câte numere naturale $\overline{ab}$ se împart exact la $2a + 3b$?

Demonstrație. Conform Teoremei împărțirii cu rest, $\overline{ab} = (2a + 3b) \cdot c$, cu $c \in \mathbb{N}^*$ sau $10a + b = (2a + 3b) \cdot c$. Dacă $c \geq 6$, atunci $(2a + 3b) \cdot c \geq 12a + 18b > 10a + b$ și nu există soluție. Analizăm următoarele cazuri:

- $c = 1 \implies 10a + b = 2a + 3b \iff 8a = 2b \implies 4a = b$ și $\overline{ab} \in \{14, 28\}$
- $c = 2 \implies 10a + b = 4a + 6b \iff 6a = 5b$, cu soluția $\overline{ab} = 56$
- $c = 3 \implies 10a + b = 6a + 9b \iff 4a = 8b \implies a = 2b$ și $\overline{ab} \in \{21, 42, 63, 84\}$
- $c = 4 \implies 10a + b = 8a + 12b \iff 2a = 11b$, nu are soluție
- $c = 5 \implies 10a + b = 10a + 15b \implies b = 0$ și $\overline{ab} \in \{10, 20, 30, \ldots, 90\}$

Sunt $\boxed{16}$ numere care verifică relația dată.

Răspuns: $\boxed{16}$ .... $10p$

□

Problema 6

Numerele naturale 2020, 12 și n au proprietatea că produsul oricăror două dintre ele este divizibil cu cel de-al treilea număr. Care este cea mai mică valoare posibilă a lui n?

Demonstrație. Cum $2020 \mid 12 \cdot n$, $12 \mid 2020 \cdot n$ și $n \mid 2020 \cdot 12$, rezultă că $505 \mid n$, $3 \mid n$, adică $n = 3 \cdot 5 \cdot 101 \cdot a$, $a \in \mathbb{N}^*$ și $a \mid 16$. Cea mai mică valoare a lui n se obține pentru $a = 1$, $n = \boxed{1515}$.

Răspuns: $\boxed{1515}$ .... $10p$

□

Problema 7

Pentru care număr natural nenul n cel mai mic multiplu comun al lui n și $n-30$ este $n+1320$?

Demonstrație. Cum $n-30 \mid n+1320$ și $n-30 \mid n-30$, scăzând relațiile obținem $n-30 \mid 1350$, de unde obținem:

$n-30 \in \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 25, 27, 30, 45, 50, 54, 75, 90, 135, 150, 225, 270, 450, 675, 1350\}$,

adică

$n \in \{31, 32, 33, 35, 36, 39, 40, 45, 48, 55, 57, 60, 75, 80, 84, 105, 120, 165, 180, 255, 300, 480, 705, 1380\}$.

Cum $n \mid n+1320 \implies n \mid 1320$, și cum am observat anterior că $n \geq 31$, obținem:

$$n \in \{33, 40, 44, 55, 60, 66, 88, 110, 120, 132, 165, 220, 264, 330, 440, 660, 1320\}$$

Astfel, n poate fi 33, 40, 55, 60, 120 sau 165. Verificând condiția se observă că doar $n = \boxed{165}$ resepectă.

Răspuns: $\boxed{165}$ .... $10p$

□

Problema 8

Se consideră șirul $1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1$, ... format astfel: se scrie un șir infinit de 1 și după primul 1 se scrie un 2, după al doilea 1 se scriu doi de 2, după al treilea 1 se scriu trei de 2 și așa mai departe. Se notează fiecare termen al șirului cu a_1, a_2, a_3, ...

a) Câte dintre produsele $a_1 \cdot a_2$, $a_2 \cdot a_3$, ..., $a_{10} \cdot a_{11}$ sunt egale cu 4?

b) Care este valoarea sumei $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \cdots + a_{2019}a_{2020}$?

Demonstrație. *a*) Sunt $\boxed{3}$ produse egale cu 4.
b) Cum nu sunt doi termeni consecutivi egali cu 1, produsele a_na_{n+1} sunt egale cu 2 sau cu 4. Termenii egali cu 1 sunt:

$$a_1 = 1$$

$$a_{3=1+2} = 1$$

$$a_{6=1+2+3} = 1$$

$$a_{10=1+2+...+4} = 1$$

$$\cdots$$

$$a_{2016=1+2+...+63} = 1$$

Prin urmare, în primii 2020 de termeni ai șirului, 63 de numere sunt egale cu 1 și restul egale cu 2. $63 \cdot 2 - 1 = 126 - 1 = 125$ de produse vor fi egale cu 2 (a_1 generează un singur produs egal cu 2).

$$4 \cdot 2019 - 125 \cdot 2 = \boxed{7826}.$$

Răspuns:

a) $\boxed{3}$ .... $5p$

b) $\boxed{7826}$ .... $5p$

□

Problema 9

Ana și Carina colorează pătrățelele unei table cu 2020 linii și 2020 coloane. Tabla este împărțită în pătrățele unitate (de latura 1), în total 2020^2 pătrățele. Pătrățelele sunt numerotate plecând din colțul stânga sus pe linie după modelul următor:

1	2	3	...	2020
2021	2022	2023	...	4040
...	...	...	...	...

Ana își alege un număr natural și calculează suma dintre cubul și pătratul acestuia, iar dacă rezulatul obținut este mai mic sau egal cu 2020^2 colorează cu roșu pătrățelul care este numerotat cu numărul astfel găsit. Și Carina alege un număr natural c și calculează suma dintre triplul lui c și succesorul pătratului lui c, iar dacă rezultatul este mai mic sau egal cu 2020^2 colorează în albastru pătrățelul care este numerotat cu numărul astfel găsit. Fiecare dintre fete colorează pătrățelul, chiar dacă a mai fost colorat anterior de cealaltă fată.

a) Care este cel mai mare număr al unui pătrățel care ar putea fi colorat?

b) Care este numărul maxim de pătrățele care ar putea fi colorate și în roșu și în albastru după regulile jocului de mai sus?

Demonstrație. *a)* Avem ecuațiile $a^2 + a^3 \leq 2020^2$ și $3c + c^2 + 1 \leq 2020^2$ de unde obținem: $1 \leq a \leq 159$ și $1 \leq c \leq 2018$. Prin urmare cel mai mare număr al unui pătrățel este $2018^2 + 2018 \cdot 3 + 1 = \boxed{4078379}$

b) $a^2 + a^3 = a \cdot \underbrace{a \cdot (a+1)}_{par}$ este par, iar $c^2 + 3c + 1 = \underbrace{c \cdot (c+1) + 2c}_{par} + 1$ este impar prin urmare numărul maxim de pătrățele care ar putea fi colorate și în roșu și în albastru este $\boxed{0}$.

Răspuns:

a) $\boxed{4078379}$ .... $5p$

b) $\boxed{0}$ .... $5p$

□

Problema 10

Spongebob a fost rugat de Domnul Krabs să facă turtițe Krabby pentru petrecerea de 1 martie, la care vor participa foarte mulți invitați. Ajutat de melcul Gary, el face o turtiță cu maioneză, apoi două turtițe cu ketchup, altele trei cu muștar și pleacă în pauză. În pauză, Plankton vine și fură 4 turtițe. Văzând că au dispărut turtițele, cei doi se reapucă de treabă și fac 5 turtițe cu maioneză, 6 cu ketchup, 7 cu muștar, pleacă în pauză, iar Plankton fură 8 turtițe și se continuă tot așa. De fiecare dată Plankton fură cu 4 turtițe mai mult față de data anterioară, iar după fiecare furt, Spongebob și melcul Gary fac cu câte 4 turtițe mai mult din fiecare fel față de data anterioară. Supărat pe furturile lui Plankton, Spongebob a împachetat cele 702 turtițe rămase și le-a servit la petrecere. Câte turtițe a reușit să fure Plankton?

Alexandru Bogdan Covăcescu, elev clasa VI, ICHB
Eduard Andrei Bănățeanu, elev clasa VI, ICHB

Demonstrație. Notăm cu n de câte ori a reușit Plankton să fure turtițe.
Prima dată el a furat $4 \cdot 1 = 4$, a doua oară $4 \cdot 2 = 8$, ..., iar ultima oară $4 \cdot n = 4n$ turtițe. Avem:

$$1+2+3-4+5+6+7-8+...+(4n-3)+(4n-2)+(4n-1)-4n+(4n+1)+(4n+2)+(4n+3) =$$

$$= 1 + 2 + 3 + ... + (4n + 3) - 2 \cdot (4 + 8 + 12 + ... + 4n) =$$

$$= 1 + 2 + 3 + ... + (4n + 3) - 8 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + n) =$$

$$= (2n + 2)(4n + 3) - 4n(n + 1) = 2(n + 1)(2n + 3) = 702$$

Obținem $(n+1)(2n+3) = 13 \cdot 3^3$. Întrucât $(n+1,\ 2n+3) = 1$, avem următoarele cazuri:

- $n + 1 = 1,\ 2n + 3 = 13 \cdot 3^3$, fără soluții;
- $n + 1 = 3^3,\ 2n + 3 = 13$, fără soluții;
- $n + 1 = 13,\ 2n + 3 = 3^3$, cu soluția $n = 12$;
- $n + 1 = 13 \cdot 3^3,\ 2n + 3 = 1$, fără soluții.

Așadar Plankton a furat $4 \cdot (1 + 2 + ... + 12) = \boxed{312}$ turtițe.

Răspuns: $\boxed{312}$ .... $10p$

□