Concursul de Matematică
Upper.School
Ediția 2020
Etapa II

Clasa a-VI-a

26 februarie 2020

§1 Soluții

Problema 1

Rezolvați fiecare dintre următoarele cerințe:

a) Care este cel mai mic număr natural de 3 cifre $\overline{abc}$ cu proprietatea că $b = \frac{a+c}{2}$?

b) Câte numere naturale de trei cifre $\overline{abc}$ au proprietatea că $b = \frac{a+c}{2}$?

Demonstrație. a) $a \neq 0$ pentru că este prima cifră a unui număr de 3 cifre, prin urmare $b \neq 0$. Pentru $a = 1$, obținem soluția minimă $\overline{abc} = \boxed{111}$.
b) Pentru că b este cifră nenulă, analizăm următoarele cazuri

- $b = 1$ și $a + c = 2$ ne dă 2 variante: 210, 111
- $b = 2$ și $a + c = 4$ ne dă 4 variante: 420, 321, 222, 123
- $b = 3$ și $a + c = 6$ ne dă 6 variante: 630, 531, 432, 333, 234, 135
- $b = 4$ și $a + c = 8$ ne dă 8 variante: 840, 741, ..., 147
- $b = 5$ și $a + c = 10$ ne dă 9 variante: 951, 852, ..., 159
- $b = 6$ și $a + c = 12$ ne dă 7 variante: 963, 864, 765, ..., 369
- $b = 7$ și $a + c = 14$ ne dă 5 variante: 975, 876, 777, 678, 579
- $b = 8$ și $a + c = 16$ ne dă 3 variante: 987, 888, 789
- $b = 9$ și $a + c = 18$ ne dă o variantă: 999

În total, există $2 + 4 + 6 + 8 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = \boxed{45}$ de astfel de numere.

Răspuns:

a) $\boxed{111}$ . . . . $6p$

b) $\boxed{45}$ .... $4p$

$\square$

Problema 2

Lucrând singur *"expertul"* poate vopsi singur o mașină în trei zile, *"priceputul"* execută aceeași lucrare în patru zile, iar *"amatorul"* în șase zile. Lucrând împreună pentru a vopsi patru mașini și lucrând în ritmul propriu cei trei muncitori vor vopsi cele patru mașini în $\frac{m}{n}$ zile, unde m și n sunt numere naturale nenule prime între ele. Care este valoarea sumei $m + n$?

Demonstrație. În 12 zile *"expertul"* poate vopsi 4 mașini, *"priceputul"* 3 mașini, iar *"amatorul"* 2 mașini. Împreună pot vopsi 9 mașini în 12 zile, iar 4 mașini în $\frac{16}{3}$ zile. Avem $m = 16$ și $n = 3$, deci $m + n = \boxed{19}$.
Observație: Din cauza unei erori de tehnoredactare, la această problemă s-a acordat punctaj maxim tuturor participanților.

Răspuns: $\boxed{19}$ .... $10p$

$\square$

Problema 3

Fie a, b, c, d, numere naturale nenule astfel încât:

$$\frac{1}{a^3} = \frac{512}{b^3} = \frac{125}{c^3} = \frac{d}{(a+b+c)^3}.$$

Să se determine valoarea numărului d.

Demonstrație. $\frac{1}{a^3} = \frac{512}{b^3} = \frac{125}{c^3}$ implică $\frac{1}{a} = \frac{8}{b} = \frac{5}{c}$, de unde $b = 8a$ și $c = 5a$. Atunci,

$$\frac{1}{a^3} = \frac{d}{(a+8a+5a)^3} = \frac{d}{14^3a^3} \implies d = 14^3,$$

adică $d = \boxed{2744}$.

Răspuns: $\boxed{2744}$ .... $10p$

$\square$

Problema 4

Câte perechi (a, b) de numere naturale, cu $a \neq b$ există dacă numărul $\frac{50688}{a+b}$ este egal cu o putere impară a lui 2?

Demonstrație. Pentru că $50688 = 2^9 \cdot 99$ se impune condiția ca $a + b = 2^k \cdot 99$, unde k poate lua valorile 0,2,4,6,8. Pentru că $a + b = 2^k \cdot 99$ pentru toate valorile lui a de la 0 la $2^k \cdot 99$, pentru fiecare valoare a lui k există $2^k \cdot 99 + 1$ scrieri de forma $a + b = 2^k \cdot 99$.

$$(2^0 \cdot 99 + 1) + (2^2 \cdot 99 + 1) + (2^4 \cdot 99 + 1) + (2^6 \cdot 99 + 1) + (2^8 \cdot 99 + 1) =$$

$$= (2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8) \cdot 99 + 5 = (1 + 4 + 16 + 64 + 256) \cdot 99 + 5 = 33764$$

Pentru $a + b = 2^2 \cdot 99, a + b = 2^4 \cdot 99, a + b = 2^6 \cdot 99, a + b = 2^8 \cdot 99$, există și soluții cu $a = b$, care nu convin. Numărul perechilor este $33764 - 4 = \boxed{33760}$.

Răspuns: $\boxed{33760}$ .... $10p$

$\square$

Problema 5

Pe tablă sunt scrise n numere naturale nenule, distincte, cel mult egale cu 2020, cu proprietatea că suma oricăror trei dintre ele este divizibilă cu 39. Care este cea mai mare valoare a numărului n?

Demonstrație. Alegem patru numere a, b, c, d. Cum $a + b + c$ și $b + c + d$ sunt divizibile cu 39, atunci și diferența lor, $a - d$ este divizibilă cu 39. Avem, astfel, că oricare două numere dau același rest la împărțirea cu 39. Cum $2020 = 39 \cdot 51 + 31$, se pot alege cel mult $\boxed{52}$ de numere cu proprietatea cerută. Un exemplu de astfel de numere este:

$$13 = 39 \cdot 0 + 13$$

$$52 = 39 \cdot 1 + 13$$

$$91 = 39 \cdot 2 + 13$$

$$130 = 39 \cdot 3 + 13$$

$$\ldots$$

$$1924 = 39 \cdot 49 + 13$$

$$1963 = 39 \cdot 50 + 13$$

$$2002 = 39 \cdot 51 + 13$$

Toate aceste numere au proprietatea că suma oricăror trei este divizibilă cu 39.

Răspuns: $\boxed{52}$ .... $10p$

$\square$

Problema 6

Care este cel mai mic multiplu al numărului 9999 care nu conține nicio cifră de 9?

Demonstrație. Evident $\boxed{0}$ este cel mai mic multiplu al lui 9999 care nu conține nicio cifră de 9.

Răspuns: $\boxed{0}$ .... $10p$

$\square$

Problema 7

Vom nota cu $upp(n)$ cel mai mic pătrat perfect mai mare sau egal decât numărul n. De exemplu $upp(0) = 0$, $upp(1) = 1$, $upp(2) = upp(3) = upp(4) = 4$.

a) Care este cea mai mică valoare a lui n pentru care $upp(n) = 2025$?

b) Pentru câte valori ale lui n valoarea lui $upp(3n + 1) = 900$?

Demonstrație. a) $upp(n) = 2025 = 45^2 \iff 44^2 + 1 \leq n \leq 45^2$. Cea mai mică valoare a lui n este $\boxed{1937}$.
b) $upp(3n+1) = 900 = 30^2 \iff 29^2 + 1 \leq 3n+1 \leq 30^2 \iff n \in \{281, 282, ..., 299\}$. În total avem $\boxed{19}$ valori cu proprietatea solicitată.

Răspuns:

a) $\boxed{1937}$ 5p

b) $\boxed{19}$ 5p

□

Problema 8

Care este restul împărțirii numărului

$$9 \cdot 99 \cdot 999 \cdot_{\dots} \cdot \underbrace{999\dots9}_{\text{de 2021 de ori}}$$

la 1000?

Demonstrație.

$$9 \cdot 99 \cdot 999 \cdot_{\dots} \cdot \underbrace{999\dots9}_{\text{de 2021 de ori}} = 891 \cdot (10^3 - 1)(10^4 - 1)(10^5 - 1) \cdot_{\dots} \cdot (10^{2021} - 1) =$$

$$= 891 \cdot \underbrace{(M_{1000} - 1)(M_{1000} - 1) \cdot_{\dots} \cdot (M_{1000} - 1)}_{\text{de 2019 ori}} =$$

$$= 891 \cdot (M_{1000} - 1) = M_{1000} - 891 = M_{1000} + \boxed{109}.$$

Răspuns: $\boxed{109}$ 10p

□

Problema 9

Se dă mulțimea $A = \{n \in \mathbb{N} | s(n) \cdot p(n) = 452\}$, unde $s(n)$ este suma cifrelor numărului n, iar $p(n)$ este produsul cifrelor numărului n?

a Câte cifre are cel mai mare element al mulțimii A?

b Câte elemente are mulțimea A?

Demonstrație. $s(n) \cdot p(n) = 452$ și $452 = 113 \cdot 2^2$. Cum 113 este număr prim și nu poate fi produsul cifrelor unui număr natural obținem că $p(n) \in \{1, 2, 4\}$. Pentru $p(n) = 1$ este evident că toate cifrele sunt egale cu 1 și au suma 452. Singurul număr care verifică este:

$$n = \underbrace{11\dots1}_{452 \text{ cifre}}$$

Evident acesta este și cel mai mare element al mulțimii A și are $\boxed{452}$ cifre. Dacă $p(n) = 2$, numerele sunt formate din 224 de cifre de 1 și o cifră egală cu 2, aceasta din urmă ocupând oricare dintre cele 225 locuri. Obținem astfel încă 225 numere. Dacă $p(n) = 4$, avem două categorii de numere: cele scrise cu o cifră de 4 și 109 cifre de 1, adică 110 numere și cele cu două cifre de 2 și 109 cifre de 1. Cifrele de 2 pot fi așezate pe C_{111}^2 perechi de locuri, adică 6105. În total avem $\boxed{6441}$ de numere.

Răspuns:

a) $\boxed{452}$ .... $5p$

b) $\boxed{6441}$ .... $5p$

$\square$

Problema 10

Care este cel mai mic număr natural n scris în baza 10 pentru care n și $n+3$ au ambele suma cifrelor numere divizibile cu 7.

Demonstrație. Dacă $s(n)$ este suma cifrelor numărului n și $u(n)$ este ultima cifră a numărului n, atunci $u(n) \leq 6$ implică $s(n+3) - s(n) = 3$, adică $s(n+3) - s(n)$ nu se divide cu 7. Dacă $u(n) = 7$, atunci $n = \overline{x_1x_2\ldots x_s\underbrace{77\ldots7}_{k \text{ ori}}}$, $x_s \neq 7$, iar pentru $k \geq 2$, $n+3 = n = \overline{x_1x_2\ldots x_s\underbrace{77\ldots7}_{k-2 \text{ ori}}80}$, de unde $s(n) - s(n+3) = 6$. Dacă $u(n) = 7$ și $k = 1$, atunci $n = \overline{x_1x_2\ldots x_s\underbrace{99\ldots9}_{t \text{ ori}}7}$. Dacă $t = 0$, obținem contradicție în mod analog cazului anterior. Dacă $t \neq 0$, atunci $n+3 = \overline{x_1x_2\ldots x_s'\underbrace{00\ldots0}_{t+1 \text{ ori}}}$, unde $x_s' = x_s + 1$. Atunci $s(n) - s(n+3) = 9t + 6$ și t minim pentru a se obține $s(n) - s(n+3)$ divizibil cu 7 este $t = 4$. Pentru $n = \overline{a99997}$, $s(n) = 43 + a$, de unde $a = 6$. Dacă $u(n) = 8$, atunci $n = \overline{x_1x_2\ldots x_s\underbrace{88\ldots8}_{k \text{ ori}}}$, $x_s \neq 8$, iar pentru $k \geq 2$, $n+3 = n = \overline{x_1x_2\ldots x_s\underbrace{88\ldots8}_{k-2 \text{ ori}}91}$, de unde $s(n) - s(n+3) = 6$. Dacă $u(n) = 8$ și $k = 1$, atunci $n = \overline{x_1x_2\ldots x_s\underbrace{99\ldots9}_{t \text{ ori}}8}$, $x_s \neq 9$. Dacă $t = 0$, obținem contradicție în mod analog cazului anterior. Dacă $t \neq 0$, atunci $n+3 = \overline{x_1x_2\ldots x_s'\underbrace{00\ldots0}_{t \text{ ori}}1}$, unde $x_s' = x_s + 1$. Astfel, $s(n) - s(n+3) = 9t + 6$ și t minim pentru a se obține $s(n) - s(n+3)$ divizibil cu 7 este $t = 4$. Pentru $n = \overline{a99998}$, $s(n) = 44 + a$, de unde $a = 5$. Dacă $u(n) = 9$, atunci $n = \overline{x_1x_2\ldots x_s\underbrace{99\ldots9}_{k \text{ ori}}}$, $x_s \neq 9$, $k \geq 1$ și $n+3 = \overline{x_1x_2\ldots x_s'\underbrace{00\ldots0}_{k-1 \text{ ori}}2}$, unde $x_s' = x_s + 1$. Atunci $s(n) - s(n+3) = 9k - 3$ și k minim pentru a se deduce și $s(n) - s(n+3)$ divizibil cu 7 este $k = 5$. Pentru $n = \overline{a99999}$, $s(n) = 45 + a$, de unde $a = 4$. În concluzie, minimul se atinge în ultimul caz, pentru $n = \boxed{499999}$.

Răspuns: $\boxed{499999}$ .... $10p$

$\square$