Concursul de Matematică
Upper.School
Ediția 2020
Etapa II

CLASA A-VII-A

26 februarie 2020

§1 Soluții

Problema 1
Se consideră mulțimea:
$$A = \{x^2 + y^2 \big| x, y \in \mathbb{Z}^*\}$$

a) Care este cel mai mic element al mulțimii A?

b) Care este cardinalul mulțimii $A \cap \{1, 2, ..., 20\}$?

Demonstrație. *a)* $\boxed{2} = 1^2 + 1^2$
b) $|A \cap \{1, 2, ..., 20\}| = |\{2, 5, 8, 10, 13, 17, 18, 20\}| = \boxed{8}$.

Răspuns:

a) $\boxed{2}$ .... $6p$

b) $\boxed{8}$ .... $4p$

□

Problema 2
Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care $a^2 - 2 = 3b - c$, $b^2 + 4 = 3c + a$, $c^2 + 4 = 3a - b$. Care este valoarea expresiei $a^4 + b^4 + c^4$?

Demonstrație. Adunând cele trei relații vom obține:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 6 = 4a + 2b + 2c \iff (a - 2)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 = 0$$

De aici $a = 2$ și $b = c = 1$. Avem deci, $a^4 + b^4 + c^4 = \boxed{18}$

Răspuns: $\boxed{18}$ .... $10p$

□

Problema 3

Pe tablă este scris un șir de numere $a_1, a_2, a_3, \dots$ după regula $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ pentru orice $n \geq 3$. Să se determine suma primilor 2020 de termeni ai șirului, știind că suma primilor 2018 termeni ai șirului este 7009 și că suma primilor 7009 termeni ai șirului este 2018.

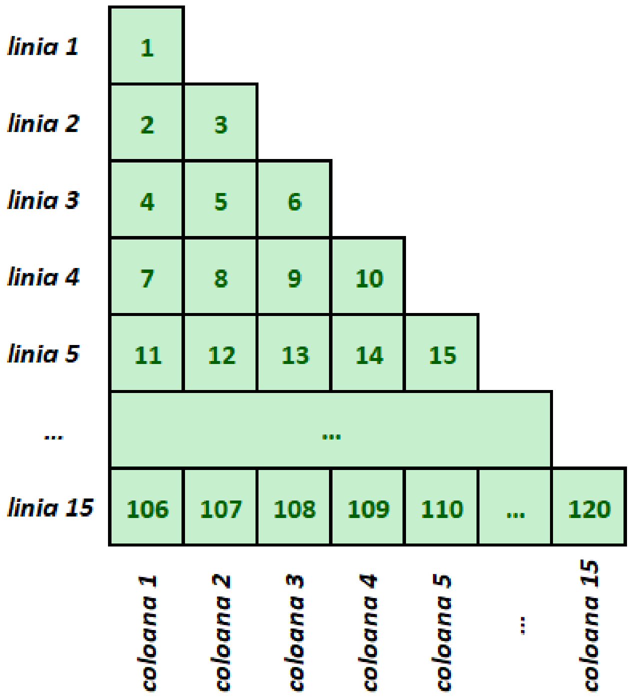
Demonstrație. Dacă $a_1 = a$ și $a_2 = b$, atunci $a_3 = b - a$, $a_4 = -a$, $a_5 = -b$, $a_6 = a - b$ și $a_7 = a$, adică termenii șirului se repetă. Astfel, $a_{6k+1} = a, a_{6k+2} = b, a_{6k+3} = b - a, a_{6k+4} = -a, a_{6k+5} = -b$ și $a_{6k} = a - b$, pentru orice număr k natural. De asemenea, $S_{6k+1} = a, S_{6k+2} = a + b, S_{6k+3} = 2b, S_{6k+4} = 2b - a, S_{6k+5} = b - a$ și $S_{6k} = 0$, pentru orice k număr natural. Revenind la problemă, $S_{2018} = a + b = 7009$ și $S_{7009} = a = 2018$, de unde $b = 4991$. Astfel, $S_{2020} = 2b - a = \boxed{7964}$.

Răspuns: $\boxed{7964}$ 10p

□

Problema 4

Numerele de la 1 la 120 sunt scrise pe 15 linii ca în imagine. Pe care coloană (numărate de la stânga la dreapta) suma numerelor este cea mai mare?



Demonstrație.

$$S_i - S_{i+1} = \frac{i(i+1)}{2} - (15 - i) = \frac{(2i+3)^2 - 129}{8}$$

Dacă $i \leq 4$ avem $(2i + 3) \geq 11$, deci $S_i < S_{i+1}$, altfel pentru $i \geq 5$ avem $S_i > S_{i+1}$. În concluzie coloana cu suma cea mai mare este coloana $\boxed{5}$.

Răspuns: $\boxed{5}$ 10p

□

Problema 5

În trapezul $ABCD$ baza mică (AB) are aceeași lungime cu latura (AD), iar diagonala (BD) este perpendiculară pe dreapta (BC). Fie $\{O\} = AC \cap BD$ și M mijlocul lui (BD).

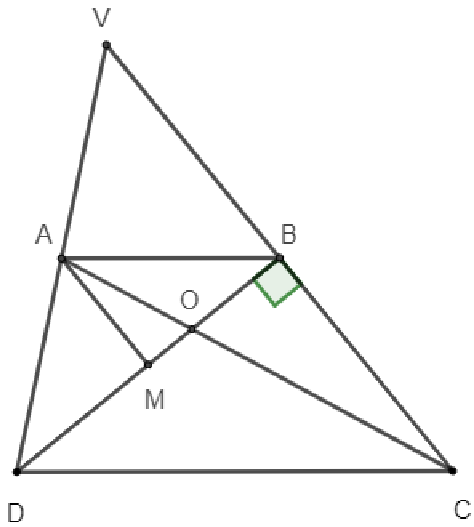
a) Care este valoarea raportului $\frac{CD}{AB}$?

b) Dacă $BD = 18\ cm$, care este lungimea segmentului (OM)?

Demonstrație. *a*) Fie $V = AD \cap BC$. Cum $(AB) \equiv (AD)$ obținem $\triangle ABD$ isoscel și $\angle ABD \equiv \angle ADB$. Dar $\angle ABD \equiv \angle BDC$ (alterne interne). (DB este bisectoarea unghiului $\angle VDC$. Dar $DB \perp VC$ și din ultimele două afirmații obținem că $\triangle VDC$ este isoscel cu $(VD) \equiv (DC)$ și B este mijlocul lui (VC). Avem $(VB) \equiv (BC)$ cu $AB \parallel CD$, iar din reciproca teoremei liniei mijlocii, obținem că (AB) este linie mijlocie in $\triangle VDC$ și $AB = \frac{CD}{2}$, iar $\frac{CD}{AB} = \boxed{2}$.
b) $AB \parallel CD$, care din Teorema Fundamentală a Asemanarii implică $\triangle AOB \sim \triangle COD$ și:

$$\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{BO}{BD} = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow BO = \frac{BD}{3}$$

$$OM = BM - BO = \frac{BD}{2} - \frac{BD}{3} = \frac{BD}{6} = \boxed{3}\ cm$$



Răspuns:

a) $\boxed{2}$ .... $5p$

b) $\boxed{3}$ .... $5p$

□

Problema 6

Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$, iar

$$n = \frac{13x+30}{3x+7} - \frac{7y+16}{3y+7}$$
$$r = \frac{19x-18y}{3x+4y}$$

Dacă $n \in \mathbb{N}$, care este a 2020-a zecimală a numărului r?

Demonstrație.

$$n = \frac{12x+28}{3x+7} + \frac{x+2}{3x+7} - \frac{6y+14}{3y+7} - \frac{y+2}{3y+7} \in \mathbb{Z}$$

Deci avem:

$$2 + \frac{x+2}{3x+7} - \frac{y+2}{3y+7} \in \mathbb{Z}$$

Adică

$$\frac{(x+2)(3y+7)-(y+2)(3x+7)}{(3x+7)(3y+7)} \in \mathbb{Z}$$

Obținem

$$3x+7 \mid (x+2)(3y+7)$$

Dar, având în vedere faptul că $(x+2, 3x+7) = 1$, obținem $3x+7 \mid 3y+7 \implies x \leq y$. În mod analog vom avea și $y \leq x$, deci $x = y$, iar $r = \frac{1}{7} = 0,(142\boxed{8}57)$

Răspuns: $\boxed{8}$ .... $10p$

□

Problema 7

Elementele mulțimii $M = \{3a + 11b \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ se scriu în ordine crescătoare. Care este al 2020-lea număr din mulțime?

Demonstrație. Considerăm următoarele cazuri:

- $b = 0 \implies$ orice număr de forma $3k$ se află în mulțimea M.
- $b = 1 \implies$ orice număr de forma $3k+2$, începând cu 11, se află în mulțimea M.
- $b = 2 \implies$ orice număr de forma $3k+1$, începând cu 22, se află în mulțimea M.

Așadar numerele $1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 16, 19$ nu se află în M. Din primele 20 de numere naturale nenule lipsesc 10. Adăugându-l și pe 0, al 2020-lea termen este $\boxed{2029}$.

Răspuns: $\boxed{2029}$ .... $10p$

□

Problema 8

Fie $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$ divizorii numărului 11!. Dacă

$$\frac{1}{d_1+\sqrt{11!}}+\frac{1}{d_2+\sqrt{11!}}+\cdots+\frac{1}{d_n+\sqrt{11!}}=\frac{a\sqrt{77}}{b},$$

cu a și b numere naturale nenule, prime între ele, să se calculeze $a+b$.

Demonstrație. Cum $11! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$, $n = (8+1)(5+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 540$ și numărul 11! are 540 de divizori. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $d_1 < d_2 < \cdots < d_{540}$. Cum numărul divizorilor este par, putem face perechi (d_k, d_{n+1-k}) cu proprietatea că $d_k \cdot d_{n+1-k} = 11!$, $1 \leq k \leq 270$ și

$$\frac{1}{d_k+\sqrt{11!}}+\frac{1}{d_{n+1-k}+\sqrt{11!}}=\frac{d_k+d_{n+1-k}+2\sqrt{11!}}{\left(d_k+\sqrt{11!}\right)\left(d_{n+1-k}+\sqrt{11!}\right)}=$$

$$=\frac{d_k+d_{n+1-k}+2\sqrt{11!}}{d_kd_{n+1-k}+\left(d_k+d_{n+1-k}\right)\sqrt{11!}+11!}=$$

$$=\frac{d_k+d_{n+1-k}+2\sqrt{11!}}{\left(d_k+d_{n+1-k}+2\sqrt{11!}\right)\sqrt{11!}}=\frac{1}{\sqrt{11!}}$$

Cum sunt 270 de perechi, suma cerută este $\frac{270}{\sqrt{11!}}=\frac{3\sqrt{77}}{616}$, de unde $a=3$ și $b=616$, deci $a+b=\boxed{619}$.

Răspuns: $\boxed{619}$ 10p

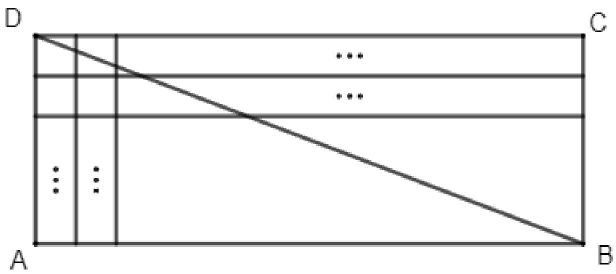
□

Problema 9

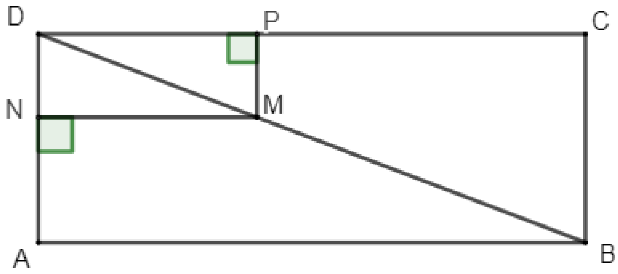
Un dreptunghi, ca în figura de mai jos, cu dimensiunile 169 și 225 este împărțit în pătrate de latură 1.

a) Câte pătrate din rețea au cel puțin un vârf pe diagonala [DB] a dreptunghiului?

b) Câte pătrate din rețea sunt intersectate de diagonala [DB]?



Demonstrație.



a) Observăm pentru început că avem 2 pătrate, cele cu vârfurile în D și B. Fie un punct M pe diagonală, diferit de D și B, iar P și N picioarele perpendicularelor din M pe CD, respectiv AB. Dacă M ar fi un vârf al rețelei atunci putem nota $MN = x$ și $MP = y$ cu $x, y \in \mathbb{N}^*$. Atunci:

$$\frac{MN}{AB} = \frac{DM}{DB} = \frac{MP}{BC} \implies \frac{x}{225} = \frac{y}{169} \iff \frac{x}{y} = \frac{225}{169}$$

Dar $1 \leq x \leq 224$, $1 \leq y \leq 168$ și $(225, 169) = 1$, deci nu mai există alte puncte în afară de D și B și, prin urmare, avem doar $\boxed{2}$ pătrate.
b) Putem duce 226 drepte verticale care intersectează diagonala și 170 drepte orizontale care intersectează diagonala. Oricare două puncte consecutive pe diagonală reprezintă un pătrat intersectat. Astfel, avem $169 + 225 - 1 = \boxed{393}$ de pătrate intersectate.

Răspuns:

a) $\boxed{2}$ .... $5p$

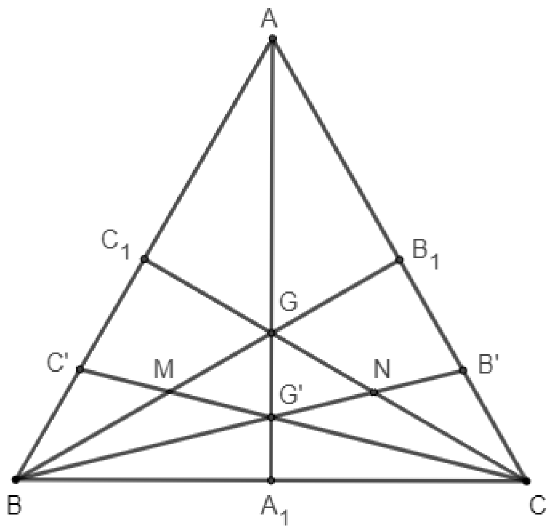
b) $\boxed{393}$ .... $5p$

□

Problema 10

Fie triunghiul echilateral $\triangle ABC$, de arie 210 cm^2, iar B_1 și C_1 mijloacele laturilor (AC), respectiv (AB) și B', C' mijloacele segmentelor (B_1C) și (BC_1). Notăm $BB_1 \cap CC_1 = \{G\}$, $BB' \cap CC' = \{G'\}$, $BB_1 \cap CC' = \{M\}$ și $BB' \cap CC_1 = \{N\}$. Să se afle aria patrulaterului $GMG'N$.

Demonstrație.



Se știe că în orice triunghi centrul de greutate se găsește pe fiecare mediană la 1/3 de piciorul medianei și 2/3 de vârful triunghiului din care pleacă mediana.
Vom arăta că $MN \parallel BC$

- Aplicăm teorema lui Menelaus în $\triangle BGC_1$ cu transversala $C - M - C'$ și obținem:

$$\frac{BM}{MG} \cdot \frac{GC}{CC_1} \cdot \frac{C_1C'}{C'B} = 1 \implies \frac{BM}{MG} = \frac{3}{2} \implies \frac{GM}{GB} = \frac{2}{5}$$

- Aplicăm teorema lui Menelaus în $\triangle CGB_1$ cu transversala $B - N - B'$ și obținem:

$$\frac{CN}{NG} \cdot \frac{GB}{BB_1} \cdot \frac{B_1B'}{B'C} = 1 \implies \frac{CN}{NG} = \frac{3}{2} \implies \frac{GN}{GC} = \frac{2}{5}$$

Prin urmare, conform reciprocei teoremei lui Thales avem $MN \parallel BC$ și $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{2}{5}$.
În continuare vom calcula raportul $\frac{CG'}{CC'}$ aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle CAC'$ cu transversala $B - G' - B'$ și obținem:

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CG'}{G'C'} \cdot \frac{C'B}{BA} = 1 \implies \frac{CG'}{G'C'} = \frac{4}{3} \implies \frac{CG'}{CC'} = \frac{4}{7}$$

Vom calcula în continuare $A_{\triangle G'MN}$ și $A_{\triangle GMN}$ astfel:

- $MN \parallel BC \xRightarrow{TFA} \triangle G'MN \sim \triangle G'BC \implies \dfrac{A_{\triangle G'MN}}{A_{\triangle G'BC}} = \left(\dfrac{MN}{BC}\right)^2 = \dfrac{4}{25}$.
  Dar $\dfrac{A_{\triangle G'BC}}{A_{\triangle CC'B}} = \dfrac{CG'}{CC'} = \dfrac{4}{7} \implies A_{\triangle G'BC} = \dfrac{4}{7} \cdot A_{\triangle CC'B} = \dfrac{1}{7} \cdot A_{\triangle ABC}$. Atunci:

$$A_{\triangle G'MN} = \frac{4}{25} \cdot A_{\triangle G'BC} = \frac{4}{7 \cdot 25} \cdot A_{\triangle ABC}.$$

- $MN \parallel BC \xRightarrow{TFA} \triangle GMN \sim \triangle GBC \implies \dfrac{A_{\triangle GMN}}{A_{\triangle GBC}} = \left(\dfrac{MN}{BC}\right)^2 = \dfrac{4}{25}$.
  Dar $A_{\triangle GBC} = \dfrac{1}{3} \cdot A_{\triangle ABC}$. Atunci:

$$A_{\triangle GMN} = \frac{4}{25} \cdot A_{\triangle GBC} = \frac{4}{3 \cdot 25} \cdot A_{\triangle ABC}.$$

$A_{GMG'N} = A_{\triangle GMN} + A_{\triangle G'MN} = \dfrac{4}{25} \cdot A_{\triangle ABC} \cdot \left(\dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{3}\right) = \boxed{16}$.

Răspuns: $\boxed{16}$ .... $10p$

□