Concursul de Matematică
Upper.School
Ediția 2020

Etapa II

Clasa a-VIII-a

26 februarie 2020

§1 Soluții

Problema 1

Considerăm mulțimea:

$$A = \{(5a+4)\cdot 5^b \big| a, b \in \mathbb{N}^*\}$$

a) Care este cel mai mic element al mulțimii A?

b) Câte elemente are mulțimea $A \cap \{1, 2, 3, ..., 500\}$?

Demonstrație. *a)* Pentru $a = b = 1$ obținem $\boxed{45} \in A$ și este cel mai mic element.
b) $(5a+4)\cdot 5^b \leq 500$
Pentru $b = 1$:

$$5a + 4 \leq 100 \iff a \in \{1, 2, ..., 19\}$$

Pentru $b = 2$:

$$(5a+4)\cdot 25 \leq 500 \iff 5a + 4 \leq 20 \iff a \in \{1, 2, 3\}$$

Pentru $b \geq 3$:

$$(5a+4)\cdot 125 \leq 500 \implies 5a + 4 \leq 4 \implies a = 0 \text{ contradicție}$$

Așadar $|A \cap \{1, 2..., 500\}| = \boxed{22}$ întrucât, evident, elementele mulțimii A pentru $b = 1$ și $b = 2$ sunt diferite.

Răspuns:

a) $\boxed{45}$ 6p

b) $\boxed{22}$ 4p

□

Problema 2

Un joc afișează $a^* = a + 3$, pentru orice număr întreg impar și $a^* = \frac{a}{2}$, pentru orice număr întreg par. Care este suma numerelor întregi a pentru care $((a^*)^*)^* = 1$?

Demonstrație. $((a^*)^*)^*$ este impar, deci $(a^*)^*$ nu poate fi impar. Astfel, $(a^*)^* = 2$, de unde $a^* = -1$ sau $a^* = 4$. Dacă $a^* = -1$, obținem $a = -2$, iar dacă $a^* = 4$, obținem $a = 1$ sau $a = 8$. În concluzie, suma este $1 + (-2) + 8 = \boxed{7}$.

Răspuns: $\boxed{7}$ .... $10p$

□

Problema 3

Numerele naturale nenule a, b, c, d, verifică relațiile $a > b > c > d$, $a+b+c+d = 2020$ și $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2020$. Câte valori poate lua numărul a?

Demonstrație. Scăzând cele două relații avem

$$a^2 - b^2 - (a + b) + c^2 - d^2 - (c + d) = 0 \implies (a + b)(a - b - 1) + (c + d)(c - d - 1) = 0.$$

Cum $(a + b)(a - b - 1) \geq 0$ și $(c + d)(c - d - 1) \geq 0$, rezultă că $a - b - 1 = 0$ și că $c - d - 1 = 0$, adică $b = a - 1$ și $d = c - 1$.
Atunci, $a + (a - 1) + c + (c - 1) = 2020$ și $c = 1011 - a$. Numerele căutate sunt $a, a - 1, 1011 - a, 1010 - a$ și $a > a - 1 > 1011 - a > 1010 - a > 0$. Rezultă că $506 < a < 1010$ sau $507 \leq a \leq 1009$.
Astfel, a poate lua $\boxed{503}$ valori.

Răspuns: $\boxed{503}$ .... $10p$

□

Problema 4

Numerele reale x și $y, y \neq 0$ verifică relațiile $x + y + \dfrac{x}{y} = 10$ și $\dfrac{x(x + y)}{y} = 20$. Să se calculeze suma tuturor valorilor posibile ale expresiei $x + y$.

Demonstrație. Dacă $S = x+y$, atunci $\frac{x}{y} = 10-S$ și $S(10-S) = 20$. Atunci $S^2-10S+20 = 0$, sau $(S - 5)^2 = 5$. Atunci $\mid S - 5 \mid = \sqrt{5}$ și $S = 5 + \sqrt{5}$ sau $S = 5 - \sqrt{5}$. Suma cerută este egală cu $\boxed{10}$.

Răspuns: $\boxed{10}$ .... $10p$

□

Problema 5

În câte moduri se pot alege patru muchii ale unui cub, astfel încât oricare două dintre ele să nu aibă niciun vârf comun?

Demonstrație. Colorăm cubul cu 2 culori astfel încât orice două vârfuri adiacente au culori diferite. Segmentul format de două puncte este o muchie a cubului dacă și numai dacă vârfurile au culori diferite și nu formează o diagonală în cub. Sunt $24 = 4!$ moduri de a alege 4 perechi de vârfuri de culori diferite. Avem 8 moduri de a alege 3 muchii cu vârfurile de culori diferite și o diagonală a cubului astfel încât orice vârf se află pe o singură muchie/ diagonală. Avem 6 moduri de a alege 2 muchii cu vârfurile de culori diferite și 2 diagonale ale cubului astfel încât orice vârf se află pe o singură muchie/ diagonală. Avem 0 moduri de a alege 1 muchie cu vârfurile de culori diferite și 3 diagonale ale cubului astfel încât orice vârf se afla pe o singură muchie/ diagonală. Avem o singură variantă cu 4 diagonale cu vârfurile de culori diferite. Prin urmare, avem în total $24 - 8 - 6 - 0 - 1 = \boxed{9}$ moduri.

Răspuns: $\boxed{9}$ .... $10p$

□

Problema 6

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ pentru care $a + \frac{1}{b} = 6$, $b + \frac{1}{c} = 10$ și $c + \frac{1}{a} = 12$.

a) Care este valoarea expresiei $a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$?

b) Care este valoarea expresiei $abc + \frac{1}{abc}$?

Demonstrație. Adunând cele trei egalități vom obține că:

$$a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} = \boxed{28}$$

Înmulțindu-le avem că:

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b + \frac{1}{c}\right) \cdot \left(c + \frac{1}{a}\right) = 720$$

sau

$$abc + \frac{1}{abc} + a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} = 720 \implies abc + \frac{1}{abc} = \boxed{692}$$

Răspuns:

a) $\boxed{28}$ .... $5p$

b) $\boxed{692}$ .... $5p$

□

Problema 7

Numerele $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ sunt scrise pe un cerc într-o ordine arbitrară. Adunându-se toate numerele cu vecinii lor (vecinul din dreapta și vecinul din stânga) se obțin zece sume. Care este valoarea maximă a celei mai mici astfel de sume ce poate fi obținută așezând cele zece numere în toate modurile posibile?

Demonstrație. Fie $a_1, a_2, a_3, ..., a_{10}$ numerele de pe cerc în ordinea aceasta. Avem deci $\{1, 2, ..., 10\} = \{a_1, a_2, ..., a_{10}\}$. Fie $S_i = a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$, pentru orice $i \in \{1, 2..., 10\}$ unde $a_{11} = a_1$, $a_{12} = a_2$. Prin urmare avem $S_{i+1} - S_i = a_{i+3} - a_i$, deci $S_{i+1} \neq S_i$. Fie acum $m = \min \{S_1, S_2, ..., S_{10}\}$. Din observația de mai sus avem $S_i + S_{i+1} \geq 2m + 1$, deci:

$$(S_1 + S_2) + (S_3 + S_4) + ... + (S_9 + S_{10}) \geq 5(2m + 1) = 10m + 5$$

Dar avem și

$$S_1 + S_2 + ... + S_{10} = 3(a_1 + a_2 + ... + a_{10}) = 5 \cdot 33$$

Obținem $m \leq 16$. Dacă $m = 16$ avem egalitate în toate inegalitățile de mai sus. Fără a restrânge generalitatea fie $a_1 = 10$, obținem $S_1 - S_2 = 10 - a_4 > 0$, deci $S_1 = 17$, iar $S_2 = 16$, și $a_4 = 9$. Acum $S_7 - S_9 = a_7 - a_1$, deci $S_9 - S_7 = 10 - a_7 > 0$ și $S_9 = 17$,$S_7 = 16$, deci $a_7 = a_4 = 9$ contradicție!. Un exemplu pentru $m = \boxed{15}$ este $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 9$, $a_4 = 2$, $a_5 = 6$, $a_6 = 7$, $a_7 = 3$, $a_8 = 8$, $a_9 = 4$, $a_{10} = 10$.

Răspuns: $\boxed{15}$ .... $10p$

□

Problema 8

Care este cardinalul mulțimii $M \cap \mathbb{N}$, unde:

$$M = \left\{ x \middle| x = \sqrt{\tfrac{a(a+1)+b(b-1)}{b-a}},\ 10 \leq a < b \leq 99, a \text{ și } b \text{ prime} \right\}$$

Demonstrație. Fie $x \in M \cap \mathbb{N}$. Avem deci și $x^2 \in \mathbb{N}$.

$$\frac{a(a+1) + b(b-1)}{b-a} \in \mathbb{N} \iff b - a \mid a^2 + b^2 + a - b \iff b - a \mid a^2 + b^2$$

Dar știm și că $b - a \mid b^2 - a^2$, de unde:

$$b - a \mid (2a^2, 2b^2) = 2$$

Cum $10 < a, b$ și a, b sunt numere prime obținem că $b - a$ este par. Atunci avem $b = a + 2$, iar

$$x = \sqrt{\frac{a(a+1) + (a+2)(a+1)}{2}} = a + 1 \in \mathbb{N}$$

Astfel am obținut că

$$|M \cap \mathbb{N}| = \left\{ 10 \leq a < b \leq 99;\ a, b \text{ prime};\ b = a + 2 \right\}$$

Prin urmare $a \in \{11, 17, 29, 41, 59, 71\}$, deci numărul căutat este $\boxed{6}$.

Răspuns: $\boxed{6}$ .... $10p$

□

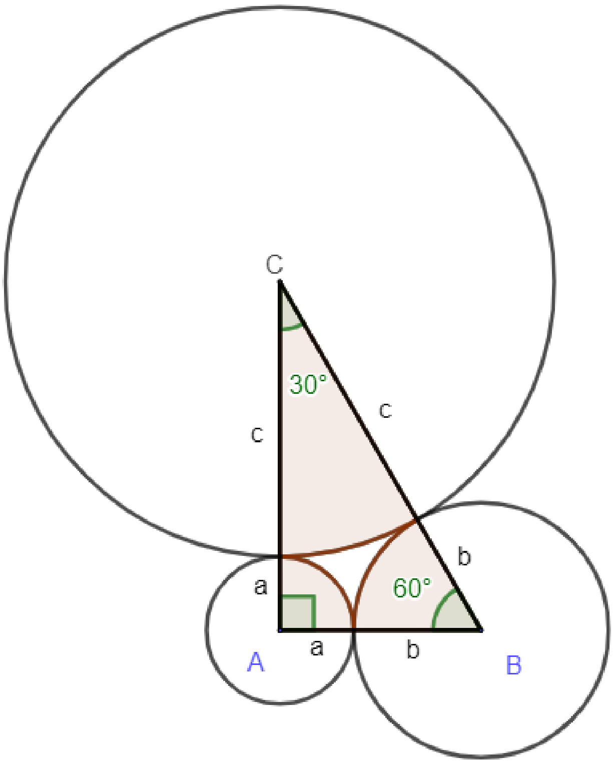
Problema 9

Fie ABC un triunghi cu măsurile unghiurilor $30°, 60°, 90°$ și cu lungimea ipotenuzei de $20\ cm$. Trei cercuri, fiecare tangent exterior celorlalte două, au centrele în vârfurile A, B și C ale triunghiului. Aria zonei comune triunghiului cu fiecare dintre cele trei cercuri însumează $(m + n\sqrt{3})\pi\ cm^2$, unde m și n sunt numere raționale. Care este valoarea lui $|m| - |n|$?

Demonstrație. Fie A vârful in care $m(\angle BAC) = 90°$ și $m(\angle ABC) = 60°$. Notăm razele celor trei cercuri cu centrele în A, B, C cu a, b și c. Astfel obținem că $a+b = 10$, $b+c = 20$ și $c + a = 10\sqrt{3}$. Adunând cele 3 relații obținem $a + b + c = 15 + 5\sqrt{3}$, de unde găsim $a = 5(\sqrt{3} - 1)$, $b = 5(3 - \sqrt{3})$, iar $c = 5(1 + \sqrt{3})$. Aria zonei comune este:

$$\frac{a^2\pi}{4} + \frac{b^2\pi}{6} + \frac{c^2\pi}{12} = \pi \cdot \left(\frac{250}{3} - \frac{100}{3}\sqrt{3}\right)$$

Avem $m = \frac{250}{3}$ și $n = \frac{-100}{3}$. Atunci $|m| - |n| = \boxed{50}$



Răspuns: $\boxed{50}$ .... $10p$

□

Problema 10

În piramida patrulateră regulată $[VABCD]$ cu $(VA) \equiv (AB)$ notăm cu M mijlocul înălțimii (VO) și cu N mijlocul segmentului (BM). Fie $P \in (AO)$ astfel încât $AP = 3 \cdot PO$.

a) Care este măsura unghiului dintre dreptele NP și VD?

b) Valoarea raportului $\frac{d(PN,VD)}{d(PN,AB)} = \frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere întregi pozitive și prime între ele. Care este valoarea numărului b^a?

Demonstrație. *a*) Notăm cu $\{R\} = BM \cap VD$ și $\{S\} = BP \cap CD$. Vom demonstra că $NP \parallel RS$.
Aplicând Teorema lui Menelaus în $\triangle VOD$ cu transversala $B - M - R$ se obține

$$\frac{VM}{MO} \cdot \frac{BO}{BD} \cdot \frac{DR}{VR} = 1 \implies \frac{VR}{RD} = \frac{1}{2}.$$

Tot cu Teorema lui Menelaus în $\triangle BRD$ cu transversala $O - M - V$, obținem

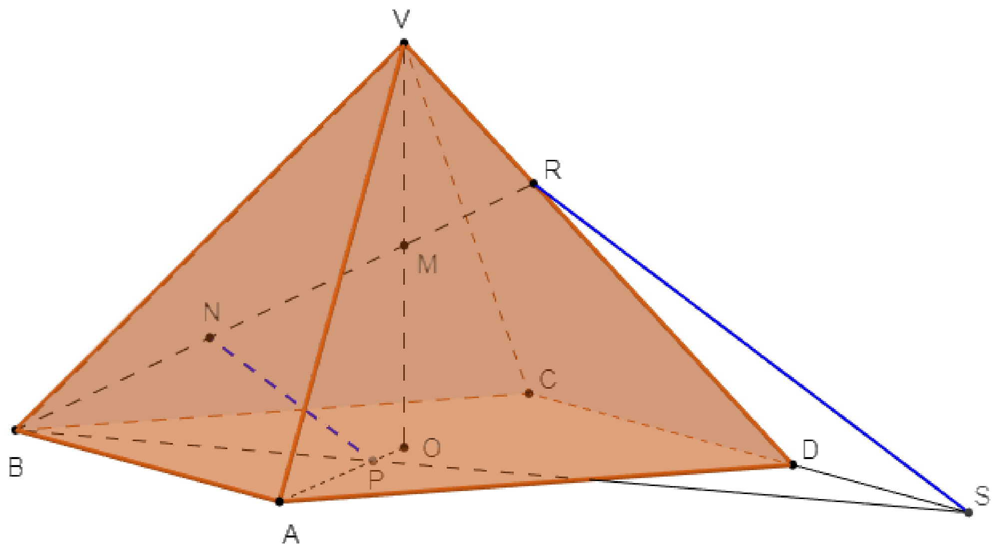
$$\frac{BM}{MR} \cdot \frac{VR}{VD} \cdot \frac{DO}{OB} = 1 \implies \frac{BM}{MR} = 3 \implies \frac{2BN}{MR} = 3 \implies \frac{BN}{MR} = \frac{3}{2} \implies \frac{BN}{BN + MR} = \frac{3}{5} \implies$$

$$\implies \frac{BN}{NR} = \frac{3}{5}. \quad (1)$$

(se poate obține același rezultat construind linia mijlocie (OT) în $\triangle BDR$ cu T mijlocul lui (DR))
În pătratul $ABCD$, din $AB \parallel CS$, obținem conform Teoremei fundamentale a asemănării că $\triangle BPA \sim \triangle SPC$, de unde

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AB}{CS} = \frac{BP}{PS} \implies \frac{BP}{PS} = \frac{3}{5}. \quad (2)$$

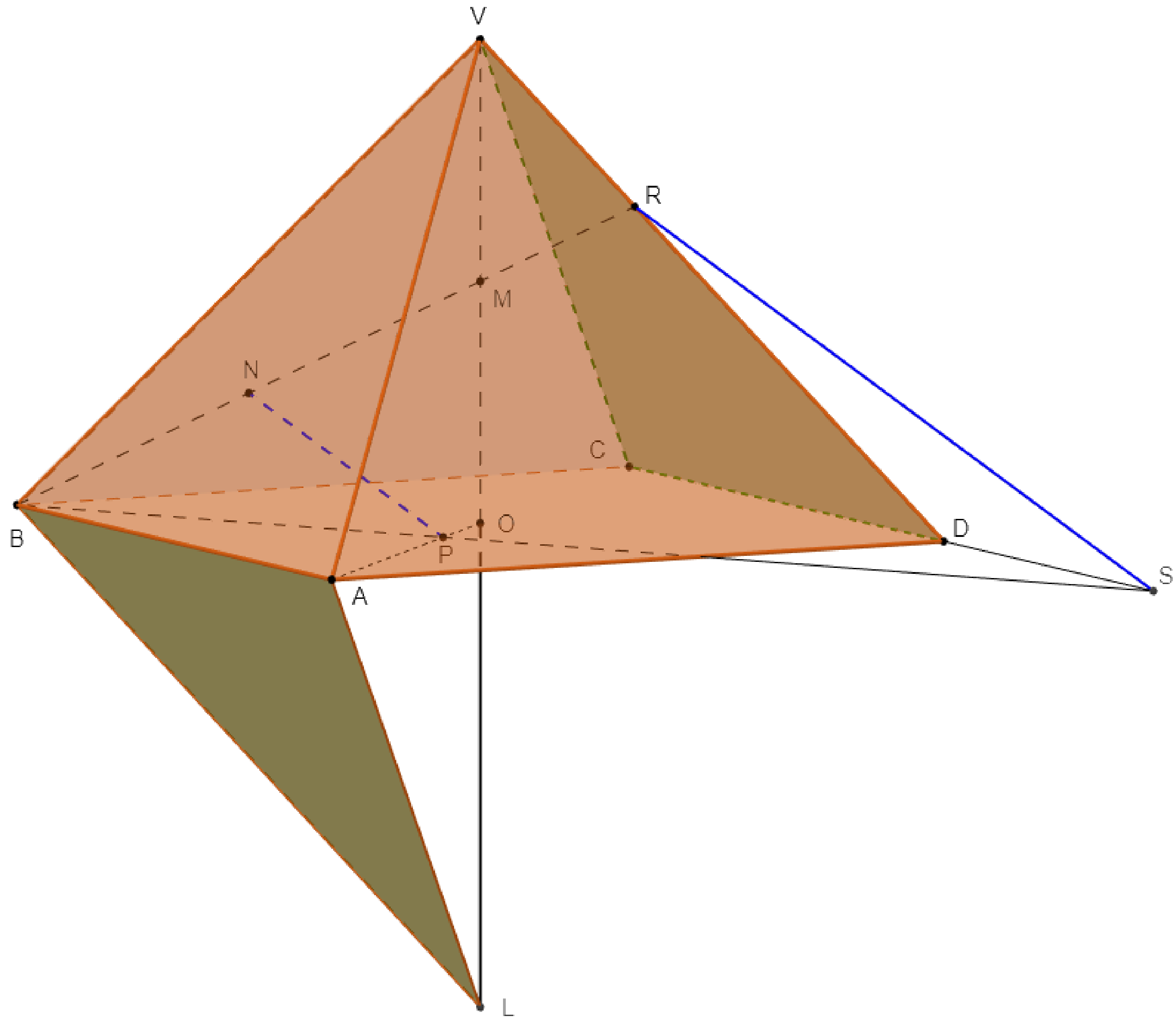
Din (1) și (2), obținem $\frac{BN}{NR} = \frac{BP}{PS} \implies NP \parallel RS$, din Reciproca Teoremei lui Thales. Astfel, $m\left(\angle(NP, VD)\right) = m\left(\angle(RS, VD)\right)$.
Pe parcursul rezolvării am obținut $\frac{VR}{RD} = \frac{1}{2}$ și $\frac{AB}{CS} = \frac{3}{5} = \frac{CD}{CS}$, de unde rezultă că $RD = DS = \frac{2}{3} \cdot VD$, adică $\triangle RDS$ este isoscel.
Cum $m(\angle VDC) = 60°$ și $\triangle VDC$ și $\triangle RDS$ se află în același plan, $m(\angle RDS) = 120°$, de unde $m(\angle DRS) = 30°$, adică $m\left(\angle(NP, VD)\right) = \boxed{30°}$.



b) Din faptul că $NP \parallel RS$ și că $RS \subset (VCD)$, obținem că $NP \parallel (VCD)$, deci există $d(NP, VD)$.
Prelungim $(VO$ cu $(OL) \equiv (VO)$. Se demonstrează ușor că $LA \parallel VC$ ($VCLA$ este paralelogram); $AB \parallel CD$, de unde $(BAL) \parallel (VCD)$ și dreapta perpendiculară din P pe planul (VCD) este perpendiculară și pe (ABL).
Cum $NP \parallel (VCD)$ și $(VCD) \parallel (ABL)$, obținem că $NP \parallel (ABL)$. Astfel, $d(NP, AB) = d\left(NP, (ABL)\right)$.

$$\frac{d(PN, VD)}{d(PN, AB)} = \frac{d\left(PN, (VDC)\right)}{d\left(PN, (ABL)\right)} = \frac{PC}{PA} = \frac{5}{3}$$

Obținem $a = 5$ și $b = 3$, de unde $b^a = 3^5 = \boxed{243}$.



Răspuns:

a) $\boxed{30}$ .... $5p$

b) $\boxed{243}$ .... $5p$

□