

Concursul de Matematică Upper.School Ediția 2020 Etapa II

CLASA A-VII-A

26 februarie 2020

§1 Soluții

Problema 1

Se consideră mulțimea:

$$A = \{x^2 + y^2 \mid x, y \in \mathbb{Z}^*\}$$

- Care este cel mai mic element al mulțimii A ?
- Care este cardinalul mulțimii $A \cap \{1, 2, \dots, 20\}$?

Problema 2

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care $a^2 - 2 = 3b - c$, $b^2 + 4 = 3c + a$, $c^2 + 4 = 3a - b$. Care este valoarea expresiei $a^4 + b^4 + c^4$?

Problema 3

Pe tablă este scris un șir de numere a_1, a_2, a_3, \dots după regula $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ pentru orice $n \geq 3$. Să se determine suma primilor 2020 de termeni ai șirului, știind că suma primilor 2018 termeni ai șirului este 7009 și că suma primilor 7009 termeni ai șirului este 2018.

Problema 4

Numerele de la 1 la 120 sunt scrise pe 15 linii ca în imagine. Pe care coloană (numărate de la stânga la dreapta) suma numerelor este cea mai mare?

linia 1	1						
linia 2	2	3					
linia 3	4	5	6				
linia 4	7	8	9	10			
linia 5	11	12	13	14	15		
...	...						
linia 15	106	107	108	109	110	...	120
	coloana 1	coloana 2	coloana 3	coloana 4	coloana 5	...	coloana 15

Problema 5

În trapezul $ABCD$ baza mică (AB) are aceeași lungime cu latura (AD), iar diagonala (BD) este perpendiculară pe dreapta (BC). Fie $\{O\} = AC \cap BD$ și M mijlocul lui (BD).

- Care este valoarea raportului $\frac{CD}{AB}$?
- Dacă $BD = 18 \text{ cm}$, care este lungimea segmentului (OM)?

Problema 6

Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$, iar

$$n = \frac{13x + 30}{3x + 7} - \frac{7y + 16}{3y + 7}$$

$$r = \frac{19x - 18y}{3x + 4y}$$

Dacă $n \in \mathbb{N}$, care este a 2020-a zecimală a numărului r ?

Problema 7

Elementele mulțimii $M = \{3a + 11b \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ se scriu în ordine crescătoare. Care este al 2020-lea număr din mulțime?

Problema 8

Fie $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ divizorii numărului $11!$. Dacă

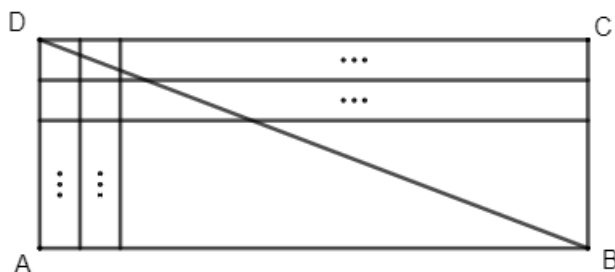
$$\frac{1}{d_1 + \sqrt{11!}} + \frac{1}{d_2 + \sqrt{11!}} + \dots + \frac{1}{d_n + \sqrt{11!}} = \frac{a\sqrt{77}}{b},$$

cu a și b numere naturale nenule, prime între ele, să se calculeze $a + b$.

Problema 9

Un dreptunghi, ca în figura de mai jos, cu dimensiunile 169 și 225 este împărțit în pătrate de latură 1.

- Câte pătrate din rețea au cel puțin un vârf pe diagonala $[DB]$ a dreptunghiului?
- Câte pătrate din rețea sunt intersectate de diagonala $[DB]$?



Problema 10

Fie triunghiul echilateral $\triangle ABC$, de arie 210 cm^2 , iar B_1 și C_1 mijloacele laturilor (AC) , respectiv (AB) și B', C' mijloacele segmentelor (B_1C) și (BC_1) . Notăm $BB_1 \cap CC_1 = \{G\}$, $BB' \cap CC' = \{G'\}$, $BB_1 \cap CC' = \{M\}$ și $BB' \cap CC_1 = \{N\}$. Să se afle aria patrulaterului $GMG'N$.