

Concursul de Matematică Upper.School Ediția 2020

Etapa II

CLASA A-VIII-A

26 februarie 2020

§1 Soluții

Problema 1

Considerăm mulțimea:

$$A = \{(5a + 4) \cdot 5^b \mid a, b \in \mathbb{N}^*\}$$

- Care este cel mai mic element al mulțimii A ?
- Câte elemente are mulțimea $A \cap \{1, 2, 3, \dots, 500\}$?

Problema 2

Un joc afișează $a^* = a + 3$, pentru orice număr întreg impar și $a^* = \frac{a}{2}$, pentru orice număr întreg par. Care este suma numerelor întregi a pentru care $((a^*)^*)^* = 1$?

Problema 3

Numerele naturale nenule a, b, c, d , verifică relațiile $a > b > c > d$, $a + b + c + d = 2020$ și $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2020$. Câte valori poate lua numărul a ?

Problema 4

Numerele reale x și $y, y \neq 0$ verifică relațiile $x + y + \frac{x}{y} = 10$ și $\frac{x(x+y)}{y} = 20$. Să se calculeze suma tuturor valorilor posibile ale expresiei $x + y$.

Problema 5

În câte moduri se pot alege patru muchii ale unui cub, astfel încât oricare două dintre ele să nu aibă niciun vârf comun?

Problema 6

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ pentru care $a + \frac{1}{b} = 6$, $b + \frac{1}{c} = 10$ și $c + \frac{1}{a} = 12$.

- Care este valoarea expresiei $a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$?
- Care este valoarea expresiei $abc + \frac{1}{abc}$?

Problema 7

Numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 sunt scrise pe un cerc într-o ordine arbitrară. Adunându-se toate numerele cu vecinii lor (vecinul din dreapta și vecinul din stânga) se obțin zece sume. Care este valoarea maximă a celei mai mici astfel de sume ce poate fi obținută așezând cele zece numere în toate modurile posibile?

Problema 8

Care este cardinalul mulțimii $M \cap \mathbb{N}$, unde:

$$M = \left\{ x \mid x = \sqrt{\frac{a(a+1)+b(b-1)}{b-a}}, 10 \leq a < b \leq 99, a \text{ și } b \text{ prime} \right\}$$

Problema 9

Fie ABC un triunghi cu măsurile unghiurilor $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ și cu lungimea ipotenuzei de 20 cm. Trei cercuri, fiecare tangent exterior celorlalte două, au centrele în vârfurile A, B și C ale triunghiului. Aria zonei comune triunghiului cu fiecare dintre cele trei cercuri însumează $(m + n\sqrt{3})\pi \text{ cm}^2$, unde m și n sunt numere raționale. Care este valoarea lui $|m| - |n|$?

Problema 10

În piramida patrulateră regulată $[VABCD]$ cu $(VA) \equiv (AB)$ notăm cu M mijlocul înălțimii (VO) și cu N mijlocul segmentului (BM) . Fie $P \in (AO)$ astfel încât $AP = 3 \cdot PO$.

- Care este măsura unghiului dintre dreptele NP și VD ?
- Valoarea raportului $\frac{d(PN,VD)}{d(PN,AB)} = \frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere întregi pozitive și prime între ele. Care este valoarea numărului b^a ?