Concursul de Matematică Upper.School Ediția 2020

Etapa III

Clasa a-V-a

22 martie 2020

§1 Soluții

Problema 1

În cutia Marei sunt piese de lego de cinci culori diferite. Piesele de aceeași culoare sunt de aceeași lungime. Nu există două piese de culori diferite care să aibă aceeași lungime. În tabelul de mai jos se regăsesc dimensiunile pieselor de lego după culoare. Piesele de lego pot fi lipite una de cealaltă așa încât împreună să formeze un turn. De exemplu, dacă aleg 2 piese albastre și 3 galbene turnul obținut prin lipirea lor are lungimea $2 \cdot 9 + 3 \cdot 5 = 33$ cm.

a) În câte moduri se pot alege piese de lego verzi și galbene care să formeze un turn cu lungimea de 29 cm?

b) Care este numărul maxim de piese ce pot fi alese din culorile verde, roz, mov și albastru, cel puțin câte 81 din fiecare culoare, astfel încât să formăm un turn cu lungimea de 2020 cm?

Verzi	Roz	Galbene	Mov	Albastre
3 cm	4 cm	5 cm	8 cm	9 cm

Demonstrație.

a) Notăm cu v numărul pieselor verzi și cu g numărul pieselor galbene.

Pentru a obține un turn de 29 cm trebuie ca

$$3v + 5g = 29$$

Cum $3v \in M_3$ și $29 \in M_3 + 2$, obținem $5g \in M_3 + 2$. Pentru că $5 \in M_3 + 2$, obținem că $g \in M_3 + 1$. În plus, $5g < 29$, așadar $g \in \{1, 4\}$.

Pentru $g = 1$, ecuația se rescrie $3v + 5 \cdot 1 = 29 \implies v = 8$.

Pentru $g = 4$, ecuația se rescrie $3v + 5 \cdot 4 = 29 \implies v = 3$.

Obținem astfel două moduri de a forma turnul de 29 cm.

b) Notăm cu $81 + v$ numărul de piese verzi, $81 + r$ numărul celor roz, $81 + m$ numărul celor mov și $81 + a$ numărul celor albastre. Avem de rezolvat ecuația:

$$3 \cdot (81 + v) + 4 \cdot (81 + r) + 8 \cdot (81 + m) + 9 \cdot (81 + a) = 2020$$

$$\iff 3v + 4r + 8m + 9a = 76$$

$$\iff 3(v + r + m + a) + r + 5m + 6a = 76$$

$v+r+m+a$ este maxim când $r+5m+6a$ este minim. Cum $3(v+r+m+a) \in M_3$ și $76 \in M_3 + 1$, obținem că $r + 5m + 6a \in M_3 + 1$. Astfel, valoare minimă a lui $r + 5m + 6a$ este 1, când $r = 1$, $m = a = 0$ și $v = 24$.

În total avem 105 piese verzi, 82 roz, iar mov și albastre câte 81 din fiecare, adică 349 de piese.

Barem:
a) Demonstrează că mulțimea soluțiilor este $\{(3, 4), (8, 1)\}$.
Observație: Dacă scrie corect ecuația dar nu află soluțiile datorită unor greșeli de calcul se acordă 1p 2*p*
b) Scrie ecuația $3v + 4r + 8m + 9a = 76$. 2*p*
Afirmă că $v + r + m + a$ este maxim când $r + 5m + 6a$ este minim. 1*p*
Demonstrază că minimul lui $r + 5m + 6a$ este 1. . . . . 1*p*
Găsește răspunsul corect. 1*p*

$\square$

Problema 2

Un număr natural nenul n se numește "sofisticat" dacă există numerele prime impare p, q și r, consecutive și distincte două câte două, astfel încât resturile împărțirii lui n la p, q și, respectiv, $3r$ să fie egale cu q, r, respectiv, p.

a) Determinați un număr natural "sofisticat".

b) Demonstrați că există o infinitate de numere naturale "sofisticate".

Demonstrație. Din Teorema împărțirii cu rest obținem că

$$n = p \cdot k_1 + q, \quad (1)$$

$$n = q \cdot k_2 + r, \quad (2)$$

$$n = 3r \cdot k_3 + p. \quad (3)$$

Astfel, $r < q < p < 3r$. (4)
Adunăm la fiecare dintre relații numerele: $p - q$ la (1), $q - r$ la (2) și $3r - p$ la (3) și obținem echivalentele:

$$n + p - q = p(k_1 + 1),$$

$$n + q - r = q(k_2 + 1),$$

$$n + 3r - p = 3r(k_3 + 1).$$

a) Pentru a găsi un exemplu, încercăm cu cele mai mici numere prime consecutive impare, 3,5,7, care respectă inegalitatea (4).

   Ecuațiile inițiale devin

$$n + 2 = 7(k_1 + 1) = 5(k_2 + 1) = 9(k_3 + 1).$$

   Astfel, numărul $n = [5, 7, 9] - 2 = 313$ respectă cerința.

b) Toate numerele de forma $n = 315k - 2$ respectă cerința, în mod evident, de la punctul a).

Barem:
Scrie corect teorema împărțirii cu rest pentru cele 3 relații. .... $0.5p$
Scrie corect inegalitățile care rezultă din teorema împărțirii cu rest, și anume $r < q < p < 3r$. .... $1.5p$
Scrie relațiile $n + p - q = p(k_1 + 1)$, $n + q - r = q(k_2 + 1)$, $n + 3r - p = 3r(k_3 + 1)$. .... $2p$
a) Găsește un exemplu corect. .... $1.5p$
b) Scrie că toate numerele de forma $n = 315k - 2$ sunt "sofisticate". .... $1.5p$

□

Problema 3

Găsiți cel mai mic număr natural n, cu cel puțin 6 divizori distincți $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5 < d_6 < \ldots$, pentru care $d_3 + d_4 = d_5 + 6$ și $d_4 + d_5 = d_6 + 7$.

Demonstrație. Mai întâi observăm că $d_2 = 2$, în caz contrar, toți divizorii ar fi impari și se observă ușor că ar fi imposibil.
Acum, $d_3 > 6$ din prima relație, de unde obținem că d_3 este prim. Dacă d_4 este par, atunci $d_4 = 2d_3$ și ar însemna că $3d_3 = d_5 + 6$, de unde $3 \mid d_5$, imposibil, deoarece $d_3 > 6$.
Astfel, d_4 este impar și d_5 este par. Atunci, $d_5 = 2d_3$ și obținem

$$d_4 = d_3 + 6 \quad \text{și} \quad d_6 = 3d_3 - 1.$$

Așadar, d_6 este par, de unde $d_6 = 2d_4$. Obținem $d_3 = 13$ și $d_4 = 19$.
În concluzie, n minim este 494.

Barem:
Argumentează că $d_2 = 2$. .... $1p$
Argumentează că d_3 este număr prim. .... $1p$
Argumentează că d_4 este număr impar. .... $0.5p$
Argumentează că d_5 este număr par. .... $0.5p$
Scrie că $d_5 = 2d_3$. .... $1p$
Argumentează că d_6 este par. .... $0.5p$
Scrie că $d_6 = 2d_4$. .... $1.5p$
Obține $d_3 = 13, d_4 = 19$. .... $0.5p$
Găsește numărul minim $n = 494$. .... $0.5p$

□

Problema 4

a) Demonstrați că numerele 2, 20, 2020, 20^2 și 2020^2 au proprietatea că oricum am alege două dintre ele, notate în continuare a și b, atunci fie suma cifrelor lui a divide suma cifrelor lui b, fie suma cifrelor lui b divide suma cifrelor lui a.

b) Care este numărul maxim de numere pe care le putem alege dintre numerele naturale $0, 1, 2, \ldots, 100$, astfel încât oricum am alege două dintre ele, notate în continuare a și b, atunci fie suma cifrelor lui a divide suma cifrelor lui b, fie suma cifrelor lui b divide suma cifrelor lui a?

Demonstraţie.

a) Sumele cifrelor numerelor scrise sunt 2, 2, 4, 4, respectiv, 16. Toate aceste numere sunt puteri ale lui 2 și deci oricum am alege 2 dintre ele în mod sigur unul dintre ele îl divide pe celălalt.

b) Suma cifrelor numerelor de la 0 la 100 ia toate valorile de la 0 la 18.

Pentru fiecare $k = \overline{0, 18}$, notăm A_k mulțimea numerelor de la 0 la 100 care au suma cifrelor k. Atunci, card A_k este:

- 1, pentru $k = 0$;
- 3, pentru $k = 1$;
- $k + 1$, pentru $k = 2, 3, \ldots, 9$;
- $19 - k$, pentru $k = 10, 11, \ldots, 18$.

Pentru a determina numărul maxim de elemente cerut, vom construi un *lanț* de forma $k_1 \mid k_2 \mid \cdots \mid k_p$, de elemente din mulțimea $\{1, 2, \ldots, 18\}$, astfel încât suma $S =$card $A_{k_1}+$ card $A_{k_2} + \cdots +$ card A_{k_p} să fie maximă. În plus, 0 poate fi adăugat ca ultim element la orice lanț, așa că îl putem ignora.

Evident, $k_p \in \{10, 11, \ldots, 18\}$ și $k_{p-1} \in \{5, 6, \ldots, 9\}$, întrucât fiecare număr din mulțimea $\{5, 6, \ldots, 9\}$ are dublul în mulțimea $\{10, 11, \ldots, 18\}$.

Situațiile în care k_p este prim se exclud, întrucât conduc, vizibil, la sume "mici". Să observăm că este mai avantajos să considerăm k_{p-1} un număr "cât mai mare".

Rămân de analizat *lanțurile*:

- $18 - 9 - 3 - 1$, pentru care se obține $S = 18$;
- $16 - 8 - 4 - 2 - 1$, pentru care se obține $S = 23$;
- $15 - 5 - 1$, pentru care se obține $S = 13$;
- $14 - 7 - 1$, pentru care se obține $S = 16$;
- $12 - 6 - 3 - 1$, pentru care se obține $S = 21$;
- $10 - 5 - 1$, pentru care se obține $S = 18$.

Numărul maxim de elemente cerut este, astfel, 24 și cuprinde numerele cu suma cifrelor 0,1,2,4,8 și 16. Mulțimea maximală este

$$\{0, 1, 10, 100, 2, 11, 20, 4, 13, 22, 31, 40, 8, 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80, 79, 88, 97\}.$$

Barem:

a) Scrie că sumele cifrelor numerelor scrise sunt 2, 2, 4, 4, respectiv, 16 și justifică că se îndeplinește proprietatea. 1p

b) Scrie că suma cifrelor numerelor de la 0 la 100 ia toate valorile de la 0 la 18. . . . 0.5p

Scrie card $A_0 = 1$ și card $A_1 = 3$. 0.5p

Scrie card $A_k = k + 1$ pentru $k = 2, 3, \ldots, 9$. 0.5p

Scrie card $A_k = 19 - k$ pentru $k = 10, 11, \ldots, 18$. 0.5p

Analizează toate lanțurile posibile. 3p

Afirmă că 24 este numărul maxim și scrie un exemplu de astfel de numere. 1p

$\square$