Concursul de Matematică Upper.School Ediția 2020

Etapa III

Clasa a-VI-a

22 martie 2020

§1 Soluții

Problema 1
Găsiți toate tripletele (a, b, c) de numere naturale nenule astfel încât $2a - 1$ este multiplu de b, $2b - 1$ este multiplu de c și $2c - 1$ este multiplu de a.

Demonstrație. Întrucât relațiile de divizibilitate sunt ciclice, fără a restrânge generalitatea problemei putem alegem a ca fiind cel mai mare dintre numere.
Atunci, $1 \leq 2c - 1 < 2a$, și cum $2c - 1$ este multiplu de $a \implies a = 2c - 1$.
Înlocuind în relații obținem că $b \mid 2a - 1 = 4c - 3$ și $c \mid 2b - 1$. Fie $b = \dfrac{kc + 1}{2}$, pentru un k natural. În continuare, analizăm următoarele 2 cazuri:

- Cazul $b \geq c$.
  Atunci, $a \geq b \geq c \implies 2a \geq 2b \geq 2c \implies 4c - 2 \geq kc + 1 \geq 2c \implies 1 \geq (2 - k)c$ și $c(4 - k) \geq 3$. Obținem $1 \leq k \leq 3$.

  Dacă $k = 1$, singura soluție este $c = 1$, de unde $a = b = 1$.

  Dacă $k = 2$, obținem contradicție deoarece b este natural.

  Dacă $k = 3$, obținem $3c + 1 \mid 8c - 6$, de unde $3c + 1 \mid 26$, de unde $c = 4$, dar b nu este natural.

  În concluzie, singura soluție este $a = b = c = 1$.

- Cazul $c \geq b$.
  Cum $b = \dfrac{kc + 1}{2} \implies c \geq \dfrac{kc + 1}{2} \implies 2c \geq kc + 1 > kc \implies k < 2 \implies k = 1$.
  Așadar, $2b = c + 1 \implies c = 2b - 1$ și cum $a = 2c - 1$, obținem $a = 4b - 3$ și prin urmare $2a - 1 = 8b - 7$
  Cum $b \mid 2a - 1 \implies b \mid 8b - 7$ și cum $b \mid 8b$, obținem $b \mid 7$
  Pentru $b = 1$, obținem soluția $a = b = c = 1$
  Pentru $b = 7$, obținem soluția $a = 25$ și $c = 13$

Cum alegerea elementului maximal a fost arbitrar, iar relațiile de divizibilitate sunt ciclice, obținem $(a, b, c) \in \{(1, 1, 1), (25, 7, 13), (13, 25, 7), (7, 13, 25)\}$.

Barem:
Observă că relațiile sunt ciclice și alege, de exemplu, numărul a ca fiind cel mai mare. ...... $0.5p$
Demonstrează că $a = 2c - 1$. ...... $0.5p$
Demonstrează că b se poate scrie de forma $b = \dfrac{kc+1}{2}$. ...... $0.5p$
Cazul 1 ($b \geq c$). Obține $1 \leq k \leq 3$. ...... $1p$
Analizează cazul $k = 1$ și obține soluția $a = b = c = 1$. ...... $0.5p$
Analizează cazul $k = 2$ fără soluții. ...... $0.5p$
Analizează cazul $k = 3$ fără soluții. ...... $0.5p$
Cazul 2 ($c \geq b$). Obține $k = 1$. ...... $1p$
Demonstrează că $b \in \{1, 7\}$. ...... $0.5p$
Analizează cazul $b = 1$ și obține soluția $a = b = c = 1$. ...... $0.5p$
Analizează cazul $b = 7$ și obține soluția $a = 25, b = 7, c = 13$. ...... $0.5p$
Scrie permutările ciclice ale soluței $a = 25, b = 7, c = 13$. ...... $0.5p$

□

Problema 2
În triunghiul $\triangle ABC$, (BM) este mediană, $M \in (AC)$, $(AD$ este bisectoare, $D \in (BC)$, iar CE este înălțime, $E \in AB$. Dacă $\angle BED \equiv \angle MED$, arătați că $\triangle ABC$ este isoscel.

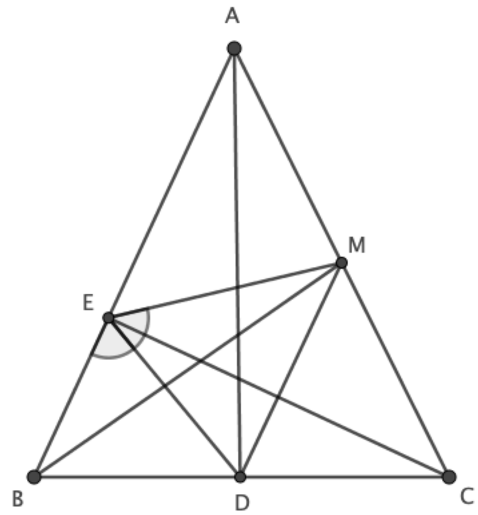
Demonstrație. $(AD$ fiind bisectoarea unghiului $\angle BAC$, rezultă că punctul D este egal depărtat de laturile unghiului. Astfel,

$$d(D, AB) = d(D, AC). \quad (1)$$

Din ipoteză, $\angle BED \equiv \angle MED$, de unde rezultă că $(ED$ este bisectoarea unghiului $\angle BEM$. Punctul D fiind pe bisectoarea $\angle BEM$, rezultă

$$d(D, BE) = d(D, EM). \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că $d(D, AC) = d(D, EM)$, de unde deducem că $(MD$ este bisectoarea $\angle EMC$, adică $\angle EMD \equiv \angle DMC$. În triunghiul dreptunghic $\triangle AEC$, $m(\angle AEC) = 90°$, (EM) este mediana corespunzătoare ipotenuzei AC, deci $EM = \frac{AC}{2} = AM = MC$.
În triunghiul isoscel $\triangle EMC$, bisectoarea MD va fi și înălțime, deci $MD \perp EC$ și, fiindcă $EC \perp AB$, rezultă că $MD \parallel AB$. Paralela la AB dusă prin M conține mijlocul laturii (BC). Astfel, $(BD) \equiv (DC)$. Atunci, bisectoarea AD este și mediană și atunci $\triangle ABC$ este isoscel cu $(AB) \equiv (AC)$.



Barem:
Demonstrează că $(MD$ este bisectoarea $\angle EMC$. 2p
Aplică teorema medianei în $\triangle AEC$ dreptunghic și obține $EM = MC$. 1p
Obține că $MD \perp EC$. 1p
Obține că $MD \parallel AB$. 1p
Obține că $(BD) \equiv (DC)$. 1p
Finalizează demonstrația. 1p

□

Problema 3

Andi și Teodor au desenat un pătrat de latură 2020 și l-au împărțit în 2020^2 pătrățele unitate, iar apoi l-au completat cu numerele de la 1 la 2020^2 începând din colțul stânga sus, înspre dreapta, apoi pe următorul rând liber de la stânga la dreapta și tot așa, ca în figura de mai jos.
Ei inventează apoi un joc. Andi alege un pătrat 3×3, iar Teodor înlocuiește fiecare număr din pătratul 3×3 cu succesorul lui. Ei termină jocul după ce Andi a ales toate pătratele 3×3, pe fiecare o singură dată.

a) Câte pătrate 3×3 a selectat Andi?

b) Cu cât este mai mare suma tuturor elementelor din tabel după ce cei doi copii au terminat jocul, față de suma tuturor numerelor care erau inițial scrise?

c) După ce au terminat jocul, verișoara lui Andi, Ecaterina, înlocuiește fiecare număr scris în tabel cu restul împărțirii acestuia la 2. De exemplu, numărul 7 este înlocuit cu 1, iar numărul 150 cu 0. Cei doi băieți calculează rapid câte cifre sunt egale cu 1 și câte sunt egale cu 0. Care este diferența pozitivă a valorilor pe care le-au găsit?

Teodor Mihai Stupariu, elev clasa a V-a, ICHB

1	2	3	...	2020
2021	2022	2023	...	4040
...	...	...	...	...

Demonstrație.

a) Inițial, pătratul a fost completat ca mai sus. Vom nota liniile cu $l_1, l_2, \ldots, l_{2020}$ și coloanele cu $c_1, c_2, \ldots, c_{2020}$.

Numărând după coloane, găsim tripletele posibile $(c_1, c_2, c_3), (c_2, c_3, c_4), \ldots, (c_{2018}, c_{2019}, c_{2020})$. La fel și după linii. Obținem astfel 2018^2 pătrate 3×3.

b) Urmează să verificăm creșterile pentru fiecare pătrățel unitate.

Colțurile sunt selectate o singură dată, prin urmare acestea vor crește cu 1.

Cele de pe (l_1, c_2), (l_2, c_1) și analoagele cresc cu 2 pentru că fac parte din 2 pătrate.

Restul pătrățelelor unitate de pe fiecare bordură (linie sau coloană de pe margine) sunt selectate de 3 ori.

Raționând similar obținem următorul tabel al creșterilor.

1	2	3	3	...	3	3	2	1
2	4	6	6	...	6	6	4	2
3	6	9	9	...	9	9	6	3
3	6	9	9	...	9	9	6	3
...	...	...	...	...	...	...	...	...
3	6	9	9	...	9	9	6	3
3	6	9	9	...	9	9	6	3
2	4	6	6	...	6	6	4	2
1	2	3	3	...	3	3	2	1

Suma tuturor numerelor crește cu suma numerelor din figura de mai sus, adică

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 \cdot 2016 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 4 \cdot 2016 + 9 \cdot 2016^2 = 36650916.$$

c) Pentru că vrem să aflăm doar resturile la împărțirea cu 2 după ce s-au făcut toate modificările vom studia doar modificarea acestora.

Repartiția inițială a resturilor era următoarea:

1	0	1	0	...	1	0	1	0
1	0	1	0	...	1	0	1	0
1	0	1	0	...	1	0	1	0
1	0	1	0	...	1	0	1	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	0	1	0	...	1	0	1	0
1	0	1	0	...	1	0	1	0
1	0	1	0	...	1	0	1	0
1	0	1	0	...	1	0	1	0

Modificările se regăsesc aici:

1	0	1	1	...	1	1	0	1
0	0	0	0	...	0	0	0	0
1	0	1	1	...	1	1	0	1
1	0	1	1	...	1	1	0	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	0	1	1	...	1	1	0	1
1	0	1	1	...	1	1	0	1
0	0	0	0	...	0	0	0	0
1	0	1	1	...	1	1	0	0

Suprapunând cele două pătrate observăm că numerele din pătratul interior determinat de liniile și coloanele $l_3, l_4, \ldots, l_{2018}$ și $c_3, c_4, \ldots, c_{2018}$ își schimbă paritatea (jumătate sunt impare și jumătate pare). Cele de pe $c_2, c_{2019}, l_2, l_{2019}$ nu își modifică paritatea.

Colțurile se transformă două în pare din impare și două în impare din pare. Rămân doar cele de pe liniile și coloanele din margine.

De la c_3 la c_{2018} pe l_1, respectiv l_{2020} nu produc modificări în numărul de pare/impare (cele pare devin impare și reciproc). Este la fel și de la l_3, l_{2018} pe c_1 și c_{2020}.

Prin urmare, diferența dintre numărul cifrelor de 0 și al celor de 1 este 0.

Barem:

a) Demonstrează că sunt 2018^2 pătrate 3×3. .... $1p$
b) Identifică creșterile din fiecare pătrățel. .... $1.5p$
Calculează corect suma creșterilor. .... $1p$
c) Scrie repartiția inițială a resturilor. .... $1p$
Scrie repartiția resturilor după ce s-a terminat jocul. .... $1p$
Justifică transformările care se produc. .... $1p$
Găsește răspunsul corect. .... $0.5p$

$\square$

Problema 4

Pentru fiecare număr natural nenul $n \geq 1$ vom nota cu p_n al n-lea număr prim ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5,\ldots$) și cu S_n următoarea sumă:

$$S_n = \frac{1}{p_1 \cdot p_2} + \frac{1}{p_2 \cdot p_3} + \frac{1}{p_3 \cdot p_4} + \cdots + \frac{1}{p_n \cdot p_{n+1}}.$$

Vom nota cu a_n numărul natural pentru care $a_n \leq 12 \cdot S_n < a_n + 1$. Care sunt valorile posibile ale lui a_n?

Demonstrație. Evident, $p_{k+1} - p_k \geq 2$, $\forall k \geq 2$.

$$\begin{aligned}
2S_n &= \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{p_2 \cdot p_3} + \frac{2}{p_3 \cdot p_4} + \cdots + \frac{2}{p_n \cdot p_{n+1}} \leq \\
&\leq \frac{1}{3} + \frac{p_3 - p_2}{p_2 \cdot p_3} + \frac{p_4 - p_3}{p_3 \cdot p_4} + \cdots + \frac{p_{n+1} - p_n}{p_n \cdot p_{n+1}} = \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_3} - \frac{1}{p_4} + \cdots + \frac{1}{p_n} - \frac{1}{p_{n+1}} = \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_{n+1}} < \frac{1}{3} + \frac{1}{p_2} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Pe de altă parte, $2S_n \geq \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$. Astfel,

$$\frac{1}{3} \leq 2S_n < \frac{2}{3} \iff 2 \leq 12S_n < 4, \quad \forall n \geq 1.$$

Dacă $n = 1$, $12S_1 = 12 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} = 2$.
Dacă $n = 2$, $12S_2 = \frac{12}{2 \cdot 3} + \frac{12}{3 \cdot 5} = \frac{14}{5}$.
Dacă $n \geq 3$, $12S_n \geq 12S_3 = \frac{12}{2 \cdot 3} + \frac{12}{3 \cdot 5} + \frac{12}{5 \cdot 7} = \frac{110}{35} > 3$.
În concluzie, pentru $n \in \{1, 2\}$, obținem $a_n = 2$ și pentru $n \geq 3$ obținem $a_n = 3$.

Barem:

Afirmă că $p_{k+1} - p_k \geq 2$, $\forall k \geq 2$. 1p
Demonstrează că $2S_n < \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{p_2} = \dfrac{2}{3}$. 2p
Afirmă că $2S_n \geq \dfrac{2}{2 \cdot 3} = \dfrac{1}{3}$. 1p
Analizează cazul $n = 1$ și obține $a_1 = 2$ 1p
Analizează cazul $n = 2$ și obține $a_2 = 2$ 1p
Analizează cazul $n \geq 3$ și obține $a_n = 3$. 1p

$\square$