Concursul de Matematică Upper.School Ediția 2020

Etapa III

Clasa a-VII-a

22 martie 2020

§1 Soluții

Problema 1

O mulțime A are 2021 elemente, numere întregi. Să se arate că există $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2020}\} \subset A$, astfel încât

$$2^{1010} \cdot 1010! \mid (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)(x_5 - x_6)\ldots(x_{2019} - x_{2020}).$$

Demonstrație. Din principiul cutiei observăm că printre cele 2021 elemente ale lui A există două care dau același rest la împărțirea prin 2020. Fie x_1, x_2 aceste elemente. Deducem că $2020 \mid (x_1 - x_2)$. (1)
Folosind aceeași idee, printre cele 2019 elemente ale mulțimii $A \setminus \{x_1, x_2\}$ există două care dau același rest la împărțirea prin 2018. Fie x_3, x_4 aceste elemente. Deducem că $2018 \mid (x_3 - x_4)$. (2)
Similar, la ultimul pas obținem că printre cele 3 elemente ale mulțimii $A \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{2018}\}$ există două cu diferența divizibilă cu 2, deci $2 \mid (x_{2019} - x_{2020})$. (1010)
Înmulțind relațiile $(1), (2), \ldots, (1010)$ obținem

$$(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2020) \mid (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)\ldots(x_{2019} - x_{2020}).$$

$$\iff 2^{1010} \cdot 1010! \mid (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)(x_5 - x_6)\ldots(x_{2019} - x_{2020})$$

Barem:
Aplică principiul cutiei și obține $2020 \mid (x_1 - x_2)$. .... $3p$
Repetă raționamentul pentru $A \setminus \{x_1, x_2\}$ și așa mai departe. .... $3p$
Înmulțește relațiile obținute și finalizează demonstrația. .... $1p$

□

Problema 2

Câte numere naturale nenule mai mici sau egale cu 1023 nu conțin trei cifre consecutive egale în reprezentarea lor în baza 2?

Demonstrație. Fiecărui număr natural a îi asociem numărul $p(a)$ obținut astfel:

- Mai întâi scriem reprezentarea lui a în baza 2.
- Începând de la stânga la dreapta înlocuim secvențele de cifre consecutive egale cu lungimile lor și astfel îl obținem pe $p(a)$.

De exemplu,

$$8 \to 1000 \to 13,$$

$$17 \to 10001 \to 131,$$

$$134 \to 10000110 \to 1421.$$

Cum prima cifră din reprezentarea în baza 2 a fiecărui număr este 1, $p(a)$ îl determină în mod unic pe a.
Pentru ca un număr natural să respecte cerința trebuie ca $p(a)$ să nu aibă cifre mai mari ca 2 și ca suma cifrelor acestuia să fie cel mult 10 (pentru că $1023 = 1111111111_{(2)}$). Așadar, trebuie să aflăm câte numere naturale respectă condițiile de mai sus, întrucât $p(a)$ îl determină în mod unic pe a.
Vom face această numărare a $p(a)$-urilor recurent. Fie s_i numărul de numere naturale care au cifre doar de 1 sau 2 și suma acestora egală cu i.
Un astfel de număr care are suma cifrelor n are prima cifră 1 sau 2. În cazul în care prima cifră este 1, rămâne un număr cu suma cifrelor $n-1$, iar în cazul în care prima cifră este 2, rămâne un număr cu suma cifrelor $n-2$. Putem deduce de aici relația de recurență

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2}.$$

Cum $s_1 = 1$ (1) și $s_2 = 2$ (11,2), obținem întreg șirul:

$$s_3 = 3, s_4 = 5, s_5 = 8, s_6 = 13, s_7 = 21, s_8 = 34, s_9 = 55, s_{10} = 89.$$

Astfel, numărul căutat este $s_1 + s_2 + \cdots + s_{10} = 231$ de numere care respectă cerința.

Barem:
Asociază fiecărui număr a numărul $p(a)$. .... $2p$
Stabilește recurența $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$. .... $3p$
Calculează valorile pentru fiecare s_i și suma lor. .... $2p$

□

Problema 3

În triunghiul ascuțitunghic $\triangle ABC$ se consideră punctul M mijlocul laturii (BC), iar $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ astfel încât $(ME) \equiv (MF)$. Perpendicularele în E pe AB și în F pe AC se intersectează în punctul D.

a) Demonstrați că $\angle ABD \equiv \angle ACD$.

b) Demonstrați că dacă punctele A, D și M sunt coliniare atunci $(AB) \equiv (AC)$.

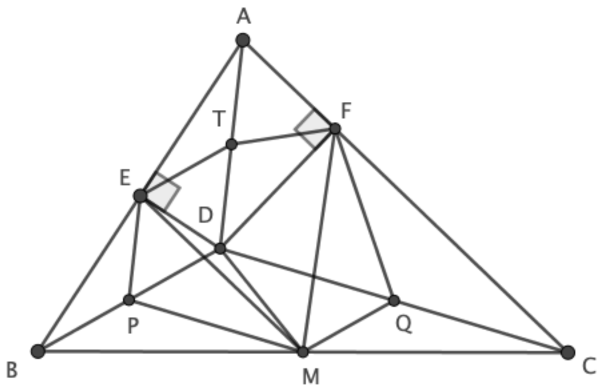
Demonstrație.

> **Observație.** Pentru a găsi o pereche de puncte E și F pentru care $(ME) \equiv (MF)$ trasăm cercul de centru M și o rază mai mare decât $d(M, AB)$ și $d(M, AC)$ și mai mică decât MA. Această există în mod clar, deoarece $m(\angle MAB)$, $m(\angle MAC) < 90°$.

a) Considerăm P mijlocul lui (BD) și Q mijlocul lui (CD). Atunci:
- PM este linie mijlocie în $\triangle BDC$, de unde $PM = \frac{DC}{2}$;
- QM este linie mijlocie în $\triangle BDC$, de unde $QM = \frac{BD}{2}$;
- EP este mediană în triunghiul dreptunghic $\triangle EBD$, de unde $EP = \frac{BD}{2}$;
- FQ este mediană în triunghiul dreptunghic $\triangle FDC$, de unde $FQ = \frac{DC}{2}$.

Acum, $\triangle PEM \equiv \triangle QMF$ (*L.L.L.*), de unde $\angle EPM \equiv \angle FQM$. Dar $\angle MPD \equiv \angle MQD$, de unde $\angle EPD \equiv \angle FQD$. Acestea sunt unghiuri formate de mediană în triunghi dreptunghic, deci $\angle ABD \equiv \angle ACD$.

b) Fie T mijlocul lui (AD). Atunci, din triunghiurile dreptunghice $\triangle AED$ și $\triangle AFD$, $(ET) \equiv (FT)$, deci T se află pe mediatoarea lui (EF).
Cum și $(ME) \equiv (MF)$, avem că și M se află pe mediatoarea lui (EF), deci TM este mediatoarea lui (EF). Cum A, D și M sunt puncte coliniare, obținem că A, T, D și M sunt, de unde AT este mediatoarea lui (EF).
Astfel, $\triangle AEF$ este isoscel și $(AT$ este bisectoarea unghiului $\angle BAC$. Cum (AM) este mediană și A, T și M sunt coliniare, obținem că $\triangle ABC$ este isoscel cu $(AB) \equiv (AC)$.



Barem:
a) Consideră mijloacele segmentelor (BD) și (CD). .... $0.5p$
Afirmă că PM este linie mijlocie și obține $PM = \frac{DC}{2}$. .... $0.5p$
Afirmă că QM este linie mijlocie și obține $QM = \frac{BD}{2}$. .... $0.5p$
Afirmă că EP este mediană și obține $EP = \frac{BD}{2}$. .... $0.5p$
Afirmă că FQ este mediană și obține $FQ = \frac{DC}{2}$. .... $0.5p$
Demonstrează că $\triangle PEM \equiv \triangle QMF$, de unde $\angle EPM \equiv \angle FQM$. .... $0.5p$
Demonstrează că $\angle EPD \equiv \angle FQD$. .... $0.5p$
Demonstrează că $\angle ABD \equiv \angle ACD$. .... $0.5p$
b) Consideră mijlocul segmentului (AD). .... $0.5p$
Demonstrează că AT este mediatoarea lui (EF). .... $1.5p$
Demonstrează că $(AT$ este bisectoarea unghiului $\angle BAC$ și mediană. .... $0.5p$
Finalizează demonstrația. .... $0.5p$

$\square$

Problema 4

Fie triunghiul ascuțitunghic $\triangle ABC$ și A', B', C' proiecțiile vârfurilor A, B, respectiv C pe laturile BC, CA și respectiv AB. Semidreapta $(C'B'$ taie cercul circumscris triunghiului $\triangle ABC$ în P. Notăm $\{Q\} = BP \cap A'C'$. Să se arate că $AP = AQ$.

Demonstrație. Fie H ortocentrul triunghiului $\triangle ABC$. Pentru că $m(\angle BA'H)+m(\angle CA'H) = 90° + 90° = 180°$, obținem că patrulaterul $A'BC'H$ este inscriptibil. De aici rezultă că

$$m(\angle BC'Q) = m(\angle BC'A') = m(\angle BHA') = 90° - m(\angle HBA') = m(\angle BCA)$$

Știim că $ABCP$ este un patrulater inscriptibil, de unde

$$m(\angle APQ) = m(\angle APB) = m(\angle BCA) = m(\angle BC'Q)$$

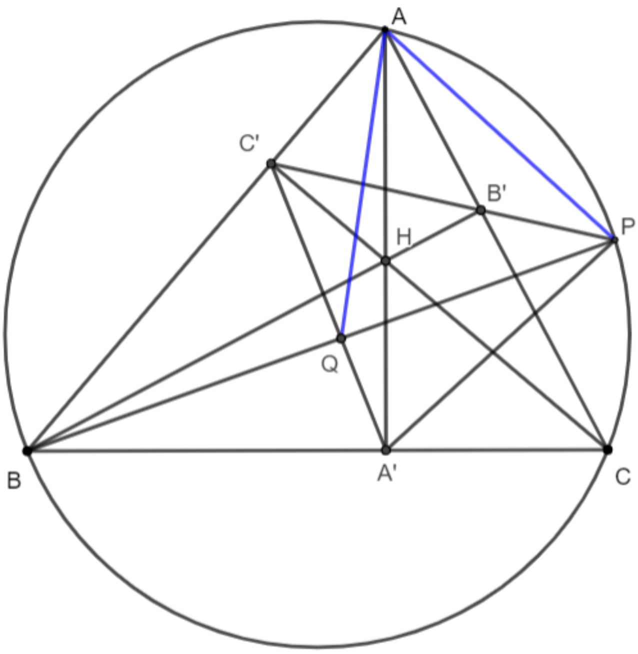
Din relația de mai sus avem că A, P, Q, C' sunt conciclice, deci

$$m(\angle AQP) = m(\angle AC'P) = m(AC'B')$$

Din faptul că $m(\angle BB'C) = m(\angle BC'C)$, avem și că $BCB'C'$ este inscriptibil, ceea ce conduce la

$$m(\angle APQ) = m(\angle ACB) = m(\angle AC'B') = m(\angle AQP)$$

Astfel am obținut faptul că triunghiul $\triangle APQ$ este isoscel de bază PQ, așadar $AP = AQ$.



Barem:

Demonstrează că $A'BC'H$ este patrulater inscriptibil. .... $1p$
Demonstrează că $m(\angle BC'Q) = m(\angle BCA)$. .... $1p$
Demonstrează că $m(\angle APQ) = m(\angle BC'Q)$. .... $2p$
Demonstrează că $m(\angle AQP) = m(\angle AC'B')$. .... $2p$
Demonstrează că $m(\angle APQ) = m(\angle AQP)$ și finalizează demonstrația. .... $1p$

$\square$