# Concursul de Matematică
# Upper.School
# Ediția 2020
## Etapa III

CLASA A-VIII-A

22 martie 2020

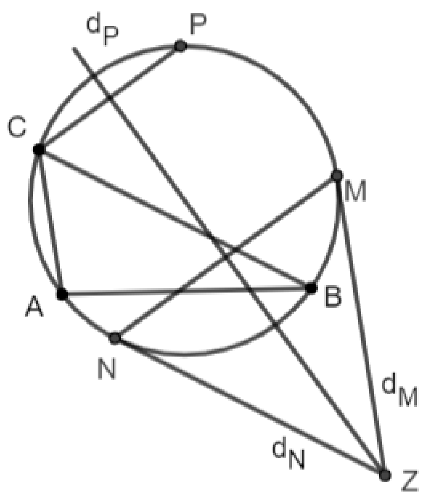
## §1 Soluții

**Problema 1**

În planul $\alpha$ considerăm cercul de centru $O$ și rază $R$, iar $A, B, C$ sunt trei puncte de pe cerc astfel încât $(AB) \not\equiv (BC) \not\equiv (CA) \not\equiv (AB)$.
Fie $M$ mijlocul arcului $\widehat{ABC}$, $N$ mijlocul arcului $\widehat{BAC}$, iar $P$ mijlocul arcului $\widehat{ACB}$.
Să se demonstreze că planul perpendicular în $M$ pe $OM$, planul perpendicular în $N$ pe $ON$ și planul mediator al segmentului $(CP)$ au o dreaptă în comun.

*Demonstrație.* Notăm cu:
- $d_M$ dreapta tangentă la cerc în punctul M;
- $d_N$ dreapta tangentă la cerc în punctul N;
- $d_P$ mediatarea segmentului (CP) care este inclusă în planul $\alpha$.

Problema revine la a demonstra că tangentele în $M$, respectiv $N$, la cerc și mediatoarea segmentului $(CP)$ sunt concurente. Altfel spus, că mediatoarea lui $(CP)$ coincide cu mediatoarea lui (MN).



$$m(\overset{\frown}{CN}) = \frac{m(\overset{\frown}{CAB})}{2} = \frac{m(\overset{\frown}{CA}) + m(\overset{\frown}{AB})}{2} \quad (1)$$

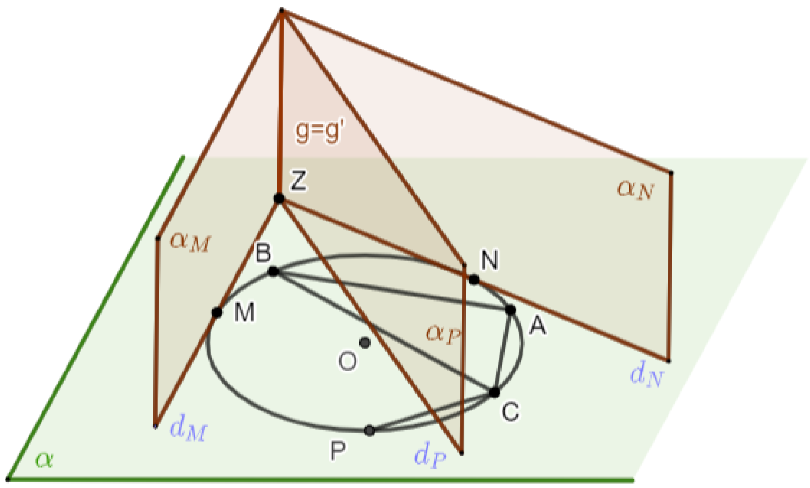
$$m(\overset{\frown}{PM}) = 360° - m(\overset{\frown}{PA}) - m(\overset{\frown}{AM}) = 360° - \frac{m(\overset{\frown}{APB})}{2} - \frac{m(\overset{\frown}{AMC})}{2} =$$

$$= 360° - \frac{m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{CB})}{2} - \frac{m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{BC})}{2} =$$

Intrucât $m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{CA}) = 360°$, obținem $m(\overset{\frown}{PM}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{AC})}{2}$ (2)

Din (1) și (2) obținem $m(\overset{\frown}{CN}) = m(\overset{\frown}{PM})$ și deci $m(\angle CMN) = \frac{m(\overset{\frown}{CN})}{2} = \frac{m(\overset{\frown}{PM})}{2} = m(\angle PCM) \implies PC \parallel MN \implies$ PCNM este trapez isoscel și, astfel, mediatoarea lui $(CP)$ coincide cu mediatoarea lui (MN). Fie $\{Z\} = d_M \cap d_N \cap d_P$.

Notăm cu:
- $\alpha_M$ planul perpendicular pe OM în M;
- $\alpha_N$ planul perpendicular pe ON în N;
- $\alpha_P$ planul mediator al segmentului (CP);




$$\left.\begin{array}{l} \alpha_M \perp \alpha \\ \alpha_N \perp \alpha \\ d_M \cap d_N = \{Z\} \\ d_M \subset \alpha_M \\ d_N \subset \alpha_N \end{array}\right\} \implies \alpha_M \cap \alpha_N = g \text{ și } g \perp \alpha, Z \in g$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_M \perp \alpha \\ \alpha_P \perp \alpha \\ d_M \cap d_P = \{Z\} \\ d_M \subset \alpha_M \\ d_P \subset \alpha_P \end{array}\right\} \implies \alpha_M \cap \alpha_P = g' \text{ și } g' \perp \alpha, Z \in g'$$

Cum perpendiculara într-un punct pe un plan este unică, obținem că $g = g'$.

**Barem:**

Demonstrează că $m(\overset{\frown}{CN}) = \frac{m(\overset{\frown}{CA})+m(\overset{\frown}{AB})}{2}$. .......................................... $2p$

Demonstrează că $m(\overset{\frown}{PM}) = \frac{m(\overset{\frown}{AB})+m(\overset{\frown}{AC})}{2}$. .......................................... $2p$

Justifică $PC \parallel MN$. .......................................................... $0.5p$

Arată că tangentele în $M$, respectiv $N$, la cerc și mediatoarea segmentului $(CP)$ sunt concurente. .......................................................... $1p$

Demonstrează că dreapta de intersecție a planelor perpendiculare în $M$ pe $OM$ și în $N$ pe $ON$ este perpendiculară pe planul $\alpha$. .................................................. $1p$
Finalizează demonstrația și argumentează concurența celor 3 plane. ................ $0.5p$

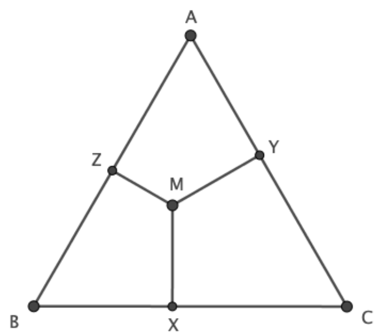
□

**Problema 2**

Un triunghi echilateral $ABC$ de latură $l$ se împarte în $2020^2$ triunghiuri echilaterale mici cu lungimea laturii egală cu $\frac{1}{2020} \cdot l$, trasând paralele la laturile triunghiului. O mulțime $U$ de vârfuri ale triunghiurilor mici se numește *izolată* dacă pentru orice două puncte distincte $P$ și $Q$ din mulțimea $U$, dreapta $PQ$ nu este paralelă cu niciuna dintre laturile triunghiului $ABC$.
Care este cel mai mare număr de elemente ale unei mulțimi *izolate*?

*Demonstrație.* Vom considera unitatea ca fiind înălțimea unui triunghi echilateral mic și atunci înălțimea triunghiului mare este 2020.
Dacă $M$ este un punct în interiorul unui triunghi echilateral atunci suma distanțelor de la $M$ la laturi este egală cu înălțimea triunghiului.
Pentru a demonstra asta să observăm că

$$A_{ABC} = A_{MAB} + A_{MAC} + A_{MBC} \iff \frac{h_a \cdot BC}{2} = \frac{MZ \cdot AB}{2} + \frac{MY \cdot AC}{2} + \frac{MX \cdot BC}{2} \iff$$
$$\iff h_a = MX + MY + MZ.$$




Fiecărui vârf al unui triunghi mic îi asociem tripletul $(x, y, z)$ ce reprezintă distanțele de la el la laturile triunghiului mare. Vom numi acest triplet coordonate.
Observăm că două puncte de coordonate $(x_1, y_1, z_1)$ și $(x_2, y_2, z_2)$ se află pe o dreaptă paralelă cu una dintre laturile triunghiului dacă și numai dacă $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ sau $z_1 = z_2$.
Condiția ca o mulțime să fie *izolată* este echivalentă cu faptul că pentru oricare două triplete are loc $(x_i - x_j)(y_i - y_j)(z_i - z_j) \neq 0$, $i \neq j$, unde $M = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_k, y_k, z_k)\}$.
Cum numerele $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sunt naturale și distincte, suma lor este cel puțin

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Analog, $y_1 + y_2 + \cdots + y_k \geq \frac{k(k-1)}{2}$ și $z_1 + z_2 + \cdots + z_k \geq \frac{k(k-1)}{2}$.
Pe de altă parte, $x_i + y_i + z_i = 2020$ pentru $\forall i = \overline{1, 2020}$. Atunci

$$3 \cdot \frac{k(k-1)}{2} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{k} y_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{k} z_i\right) = 2020 \cdot k.$$

Obținem $k \le \frac{2}{3}\cdot 2020+1 \implies k \le 1347$.

Următoarele două șiruri de puncte formează o mulțime *izolată* cu 1347 elemente:

$$(0,673,1347);(2,672,1346);(4,671,1345);\dots;(1346,0,674),$$

$$(1,1346,673);(3,1345,672);(5,1344,671);\dots;(1345,674,1).$$

**Barem:**
Demonstrează că suma distanțelor de la un punct interior unui triunghi este egală cu înălțimea. .......... $1p$
Transfeă condiția ca o mulțime să fie izolată în $(x_i-x_j)(y_i-y_j)(z_i-z_j)\neq 0$, $i\neq j$. ...... $1p$
Obține $3\cdot\frac{k(k-1)}{2} \le \left(\sum_{i=1}^k x_i\right)+\left(\sum_{i=1}^k y_i\right)+\left(\sum_{i=1}^k z_i\right)=2020\cdot k$. .......... $2p$
Obține $k\le 1347$. .......... $1p$
Găsește un exemplu corect. .......... $2p$

□

**Problema 3**

Fie $a,b,c$ numere reale mai mari sau egale cu 1 pentru care $a\le b\le c$. Demonstrați că

$$\frac{a+b+c}{4} \ge \frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}.$$

Are loc egalitatea?

*Demonstrație.* Aplicăm $M_g - M_a$ și obținem

$$\sqrt{ab-1}=\sqrt{1\cdot(ab-1)}\le\frac{1+ab-1}{2}=\frac{ab}{2}$$

și analoagele, de unde

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}\le\frac{ab}{2(b+c)}+\frac{bc}{2(c+a)}+\frac{ca}{2(a+b)}.$$

Acum vom demonstra că

$$\frac{ab}{2(b+c)}+\frac{bc}{2(c+a)}+\frac{ca}{2(a+b)}\le\frac{a+b+c}{4}$$

$$\iff \frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{a+b}\le\frac{a+b+c}{2}.$$

Pentru că

$$\left(\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{a+b}\right)+\left(\frac{ac}{b+c}+\frac{ba}{c+a}+\frac{cb}{a+b}\right)=a+b+c,$$

intuim că ar trebui să demonstrăm că

$$\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{a+b}\le\frac{ac}{b+c}+\frac{ba}{c+a}+\frac{cb}{a+b}$$

$$\iff \frac{ab}{b+c}-\frac{ac}{b+c}+\frac{bc}{c+a}-\frac{bc}{a+b}+\frac{ca}{a+b}-\frac{ab}{a+c}\le 0$$

$$\iff (b-c)\cdot\frac{a}{b+c}+bc\cdot\left(\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b}\right)+a\cdot\left(\frac{c}{a+b}-\frac{b}{a+c}\right)\le 0$$

$$\iff (b-c)\cdot\frac{a}{b+c}+bc\cdot\frac{b-c}{(c+a)(a+b)}+\frac{a^2c+ac^2-a^2b-ab^2}{(a+b)(a+c)}\le 0$$

$$\iff (b-c)\cdot\frac{a}{b+c}+bc\cdot\frac{b-c}{(c+a)(a+b)}+\frac{a^2(c-b)-a(b-c)(b+c)}{(a+b)(a+c)}\le 0$$

$$\iff (b-c)\cdot\left(\frac{a}{b+c}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}-\frac{a^2+ab+ac}{(a+b)(a+c)}\right)\le 0.$$

Aducând la același numitor și factorizând se obține

$$\frac{(b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\le 0.$$

Produsul $(a-b)(b-c)(a-c)$ este mai mic sau egal decât zero pentru că $a-b\le 0$, $b-c\le 0$ și $a-c\le 0$.
Considerând inegalitatea mediilor din primul pas, obținem că $ab=bc=ca=2$ în cazul de egalitate, adică $a=b=c=\sqrt{2}$.

**Barem:**
Aplică inegalitatea mediilor și obține $\sqrt{ab-1}\le\frac{ab}{2}$ .................................. $1p$
Observă că $\sum_{cyc}\frac{ab}{b+c}+\sum_{cyc}\frac{ac}{b+c}=\sum_{cyc}a$. .................................................... $2p$
Demonstrează că $\sum_{cyc}\frac{ab}{b+c}\le\sum_{cyc}\frac{ac}{b+c}$. ................................................ $2p$
Finalizează demonstrația. ........................................................................ $1p$
Tratează cazul de egalitate. ..................................................................... $1p$

□

**Problema 4**

Considerăm $n\ge 2$ puncte distincte în plan, $A_1, A_2, ..., A_n$. Pentru fiecare pereche $(i, j)$, cu $i<j$, colorăm mijlocul segmentului $(A_iA_j)$. Determinați numărul minim de puncte distincte colorate.

*Demonstrație.* Vom arăta că numărul minim de puncte colorate este $2n-3$. Acest număr se atinge, de exemplu, când $A_1, A_2, ..., A_n$ sunt coliniare și $A_1A_2=A_2A_3=...=A_{n-1}A_n$. Cele $2n-3$ puncte colorate vor fi mijloacele segmentelor $(A_1A_2), (A_2A_3), \dots, (A_{n-1}A_n)$ (în numar de $n-1$) și punctele $A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ (în numar de $n-2$).
Fără a restrânge generalitatea, să presupunem că $(A_1A_n)$ este segmentul de lungime maximă.
Atunci, mijloacele segmentelor $(A_1A_i)$, cu $2\le i\le n-1$ sunt toate distincte, aflându-se în interiorul sau pe circumferința cercului de centru $A_1$ și rază $\frac{A_1A_n}{2}$. Astfel, avem $n-2$ puncte colorate.
Să considerăm si segmentele $(A_nA_k)$, cu $2\le k\le n-1$. Acestea sunt distincte între ele și se află în interiorul sau pe circumferința cercului de centru $A_n$ si rază $\frac{A_nA_1}{2}$. Astfel, avem înca $n-2$ puncte colorate.
Cum cele două cercuri (cel de centru $A_1$ si rază $\frac{A_1A_n}{2}$ și cel de centru $A_n$ si rază $\frac{A_nA_1}{2}$) au un singur punct comun, acela fiind mijlocul segmentului $(A_1A_n)$, cele $n-2$ puncte din interiorul primului cerc nu pot coincide cu cele $n-2$ puncte din interiorul celui de-al doilea

cerc.
Astfel, am găsit $(n-2)+(n-2)$ puncte colorate distincte, iar împreuna cu mijlocul segmentului $(A_1A_n)$ avem minim $2n-3$ puncte distincte colorate.

**Barem:**

Alege segmentul de dimensiune maximă, de exemplu $(A_1A_n)$. .......................... $1p$
Arată că mijloacele segmentelor $(A_1A_i)$, cu $2 \leq i \leq n-1$ formează o mulțime $X$ cu $n-2$ puncte colorate. .......................... $1p$
Arată că mijloacele segmentelor $(A_nA_k)$, cu $2 \leq k \leq n-1$ formează o mulțime $Y$ cu *încă* $n-2$ puncte colorate. .......................... $1p$
Afirmă că $X \cap Y = \emptyset$. .......................... $1p$
Afirmă că mijlocul segmentului $(A_1A_n) \notin X \cup Y$ .......................... $1p$
Argumentează că minimul căutat este $2n-3$. .......................... $1p$
Găsește un exemplu corect. .......................... $1p$

$\square$