

Concursul de Matematică Upper.School Ediția 2020

Etapa III

CLASA A-V-A

22 martie 2020

§1 Subiecte

Problema 1

În cutia Marei sunt piese de lego de cinci culori diferite. Piesele de aceeași culoare sunt de aceeași lungime. Nu există două piese de culori diferite care să aibă aceeași lungime. În tabelul de mai jos se regăsesc dimensiunile pieselor de lego după culoare. Piesele de lego pot fi lipite una de cealaltă așa încât împreună să formeze un turn. De exemplu, dacă aleg 2 piese albastre și 3 galbene turnul obținut prin lipirea lor are lungimea $2 \cdot 9 + 3 \cdot 5 = 33$ cm.

- În câte moduri se pot alege piese de lego verzi și galbene care să formeze un turn cu lungimea de 29 cm?
- Care este numărul maxim de piese ce pot fi alese din culorile verde, roz, mov și albastru, cel puțin câte 81 din fiecare culoare, astfel încât să formăm un turn cu lungimea de 2020 cm?

Verzi	Roz	Galbene	Mov	Albastre
3 cm	4 cm	5 cm	8 cm	9 cm

Problema 2

Un număr natural nenul n se numește "sofisticat" dacă există numerele prime impare p, q și r , consecutive și distincte două câte două, astfel încât resturile împărțirii lui n la p, q și, respectiv, $3r$ să fie egale cu q, r , respectiv, p .

- Determinați un număr natural "sofisticat".
- Demonstrați că există o infinitate de numere naturale "sofisticate".

Problema 3

Găsiți cel mai mic număr natural nenul n pentru care primii săi 6 divizori respectă următoarele condiții:

$$1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5 < d_6 < \dots;$$

$$d_3 + d_4 = d_5 + 6;$$

$$d_4 + d_5 = d_6 + 7.$$

Problema 4

- a) Demonstrați că numerele 2, 20, 2020, 20^2 și 2020^2 au proprietatea că oricum am alege două dintre ele, notate în continuare a și b , atunci fie suma cifrelor lui a divide suma cifrelor lui b , fie suma cifrelor lui b divide suma cifrelor lui a .
- b) Care este numărul maxim de numere pe care le putem alege dintre numerele naturale $0, 1, 2, \dots, 100$, astfel încât oricum am alege două dintre ele, notate în continuare a și b , atunci fie suma cifrelor lui a divide suma cifrelor lui b , fie suma cifrelor lui b divide suma cifrelor lui a ?