

Concursul de Matematică Upper.School Ediția 2020

Etapa III

CLASA A-VI-A

22 martie 2020

§1 Subiecte

Problema 1

Găsiți toate tripletele (a, b, c) de numere naturale nenule astfel încât $2a - 1$ este multiplu de b , $2b - 1$ este multiplu de c și $2c - 1$ este multiplu de a .

Problema 2

În triunghiul $\triangle ABC$, (BM) este mediană, $M \in (AC)$, (AD) este bisectoare, $D \in (BC)$, iar CE este înălțime, $E \in AB$. Dacă $\angle BED \equiv \angle MED$, arătați că $\triangle ABC$ este isoscel.

Problema 3

Andi și Teodor au desenat un pătrat de latură 2020 și l-au împărțit în 2020^2 pătrățele unitate, iar apoi l-au completat cu numerele de la 1 la 2020^2 începând din colțul stânga sus, înspre dreapta, apoi pe următorul rând liber de la stânga la dreapta și tot așa, ca în figura de mai jos.

Ei inventează apoi un joc. Andi alege un pătrat 3×3 , iar Teodor înlocuiește fiecare număr din pătratul 3×3 cu succesul lui. Ei termină jocul după ce Andi a ales toate pătratele 3×3 , pe fiecare o singură dată.

- a) Câte pătrate 3×3 a selectat Andi?
- b) Cu cât este mai mare suma tuturor elementelor din tabel după ce cei doi copii au terminat jocul, față de suma tuturor numerelor care erau inițial scrise?
- c) După ce au terminat jocul, verișoara lui Andi, Ecaterina, înlocuiește fiecare număr scris în tabel cu restul împărțirii acestuia la 2. De exemplu, numărul 7 este înlocuit cu 1, iar numărul 150 cu 0. Cei doi băieți calculează rapid câte cifre sunt egale cu 1 și câte sunt egale cu 0. Care este diferența pozitivă a valorilor pe care le-au găsit?

Teodor Mihai Stupariu, elev clasa a V-a, ICHB

1	2	3	...	2020
2021	2022	2023	...	4040
...

Problema 4

Pentru fiecare număr natural nenul $n \geq 1$ vom nota cu p_n al n -lea număr prim ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$) și cu S_n următoarea sumă:

$$S_n = \frac{1}{p_1 \cdot p_2} + \frac{1}{p_2 \cdot p_3} + \frac{1}{p_3 \cdot p_4} + \dots + \frac{1}{p_n \cdot p_{n+1}}.$$

Vom nota cu a_n numărul natural pentru care $a_n \leq 12 \cdot S_n < a_n + 1$. Care sunt valorile posibile ale lui a_n ?