Concursul de Matematică Upper.School Ediția 2020

Etapa III

Clasa a-VII-a

22 martie 2020

§1 Subiecte

Problema 1

O mulțime A are 2021 elemente, numere întregi. Să se arate că există $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2020}\} \subset A$, astfel încât

$$2^{1010} \cdot 1010! \mid (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)(x_5 - x_6) \ldots (x_{2019} - x_{2020}).$$

Problema 2

Câte numere naturale nenule mai mici sau egale cu 1023 nu conțin trei cifre consecutive egale în reprezentarea lor în baza 2?

Problema 3

În triunghiul ascuțitunghic $\triangle ABC$ se consideră punctul M mijlocul laturii (BC), iar $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ astfel încât $(ME) \equiv (MF)$. Perpendicularele în E pe AB și în F pe AC se intersectează în punctul D.

a) Demonstrați că $\angle ABD \equiv \angle ACD$.

b) Demonstrați că dacă punctele A, D și M sunt coliniare atunci $(AB) \equiv (AC)$.

Problema 4

Fie triunghiul ascuțitunghic $\triangle ABC$ și A', B', C' proiecțiile vârfurilor A, B, respectiv C pe laturile BC, CA și respectiv AB. Semidreapta $(C'B'$ taie cercul circumscris triunghiului $\triangle ABC$ în P. Notăm $\{Q\} = BP \cap A'C'$. Să se arate că $AP = AQ$.