Concursul de Matematică Upper.School Ediția 2020

Etapa III

CLASA A-VIII-A

22 martie 2020

§1 Subiecte

Problema 1

În planul α considerăm cercul de centru O și rază R, iar A, B, C sunt trei puncte de pe cerc astfel încât $(AB) \not\equiv (BC) \not\equiv (CA) \not\equiv (AB)$.
Fie M mijlocul arcului $\widehat{ABC}$, N mijlocul arcului $\widehat{BAC}$, iar P mijlocul arcului $\widehat{ACB}$.
Să se demonstreze că planul perpendicular în M pe OM, planul perpendicular în N pe ON și planul mediator al segmentului (CP) au o dreaptă în comun.

Problema 2

Un triunghi echilateral ABC de latură l se împarte în 2020^2 triunghiuri echilaterale mici cu lungimea laturii egală cu $\frac{1}{2020} \cdot l$, trasând paralele la laturile triunghiului. O mulțime U de vârfuri ale triunghiurilor mici se numește *izolată* dacă pentru orice două puncte distincte P și Q din mulțimea U, dreapta PQ nu este paralelă cu niciuna dintre laturile triunghiului ABC.
Care este cel mai mare număr de elemente ale unei mulțimi *izolate*?

Problema 3

Fie a, b, c numere reale mai mari sau egale cu 1 pentru care $a \le b \le c$. Demonstrați că

$$\frac{a+b+c}{4} \ge \frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} + \frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} + \frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}.$$

Are loc egalitatea?

Problema 4

Considerăm $n \ge 2$ puncte distincte în plan, $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Pentru fiecare pereche (i, j), cu $i < j$, colorăm mijlocul segmentului $(A_i A_j)$. Determinați numărul minim de puncte distincte colorate.