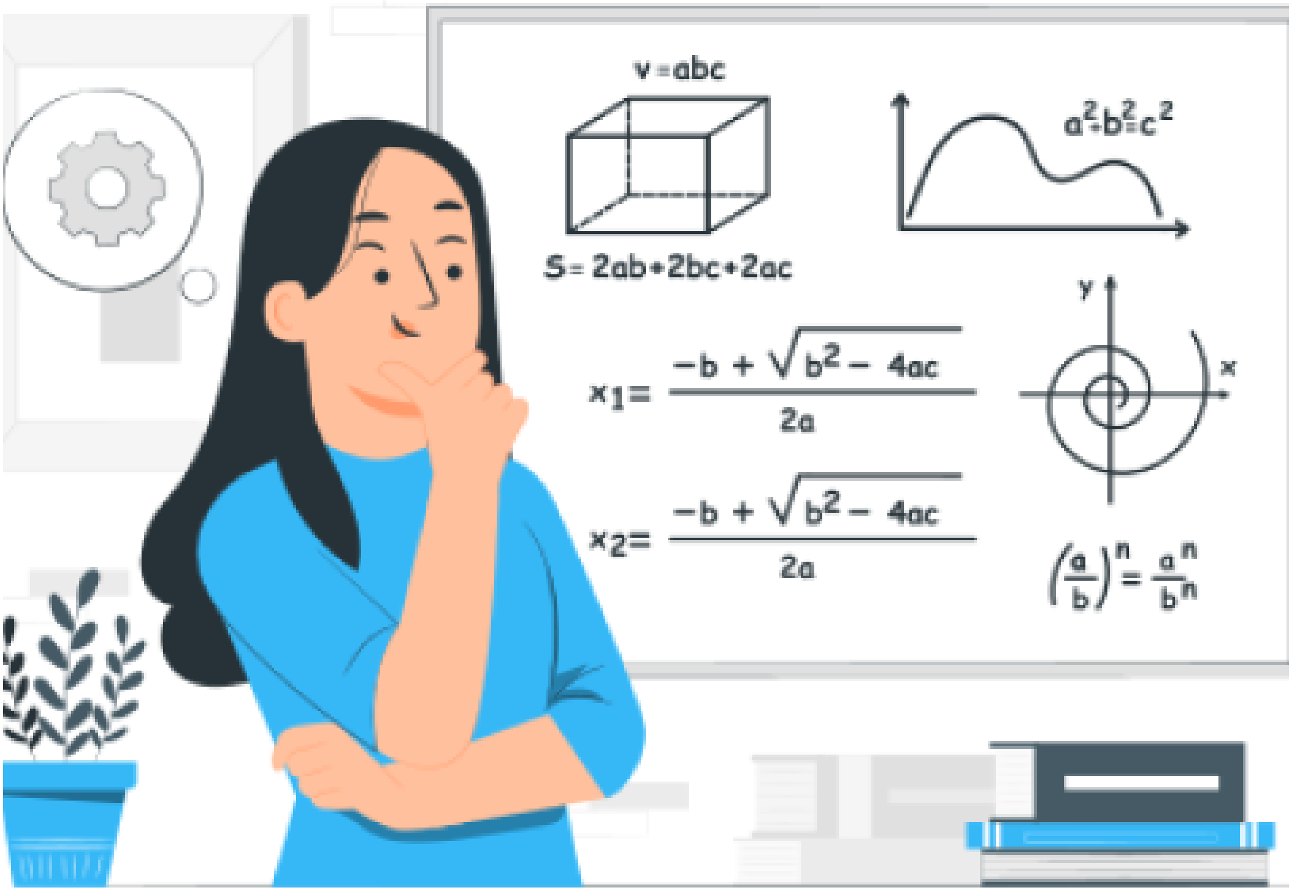

Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022-2023

Etapa I
Clasa a V-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Restul împărțirii numărului 2022 la 2023 este egal cu:

a) 2022 b) 2023 c) 1 d) 0

Demonstrație. Din teorema împărțirii cu rest avem $2022 = 2023 \cdot 0 + 2022$, deci restul acestei împărțiri este $\boxed{2022}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

□

Problema 2

Dacă $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 99 + x = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 100$, atunci valoarea lui x este egală cu:

a) 51 b) 49 c) 50 d) 99

Demonstrație. Relația $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 99 + x = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 100$ poate fi rescrisă astfel $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 99 + x = 1 + 1 + 3 + 1 + 5 + 1 + 7 + 1 + \ldots + 99 + 1$. Scădem din această egalitate $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 99$ și obținem $x = \boxed{50}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 3

Valoarea numărului x din egalitatea $[(8 \cdot x + 24) : 5] : 4 + 6 = 10$ este egală cu:

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8

Demonstrație.

$$[(8 \cdot x + 24) : 5] : 4 + 6 = 10 \iff$$
$$[(8 \cdot x + 24) : 5] : 4 = 10 - 6 \iff$$
$$[(8 \cdot x + 24) : 5] : 4 = 4 \iff$$
$$(8 \cdot x + 24) : 5 = 4 \cdot 4 \iff$$
$$8 \cdot x + 24 = 16 \cdot 5 \iff$$
$$8 \cdot x + 24 = 80 \iff$$
$$8 \cdot x = 80 - 24 \iff$$
$$8 \cdot x = 56 \iff$$
$$x = \boxed{7}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 4

La o cofetărie s-au adus 625 de sticle de apă minerală, ambalate în navete. În fiecare navetă încap 20 de sticle și doar o singură navetă conține mai puțin de 20 de sticle. Câte navete s-au adus în total?

a) 31 b) 32 c) 33 d) 34

Demonstrație. Numărul de navete complete este dat de restul împărțirii lui 625 la 20. Cum $625 : 20 = 31$ rest 5, înseamnă că 31 de navete sunt complete și una are doar 5 sticle în ea. Numărul total de navete este $\boxed{32}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 5

Diferența dintre suma primelor 100 de numere naturale și produsul primelor 100 de numere naturale este egală cu:

a) 5050 b) 4950 c) 5151 d) 4940

Demonstrație. $0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 - 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 99 = (1 + 99) \cdot 99 : 2 - 0 = \boxed{4950}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 6

Suma cifrelor numărului $10^{200} + 9 \cdot 10^{198} - 2$ este egală cu:

a) 1800 b) 1791 c) 10 d) 1790

Demonstrație. $10^{200} + 9 \cdot 10^{198} - 2 = 1\underbrace{00\ldots0}_{200 \text{ cifre}} + 9\underbrace{00\ldots0}_{198 \text{ cifre}} - 2 = 108\underbrace{99\ldots9}_{197 \text{ cifre}}8$. Suma cifrelor acestui număr este egală cu $197 \cdot 9 + 1 + 8 + 8 = \boxed{1790}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 7

Care este suma tuturor numerelor naturale care împărțite la 7 dau câtul egal cu restul?

a) 168 b) 172 c) 160 d) 195

Demonstrație. Conform teoremei împărțirii cu rest $n = 7 \cdot c + r$, $r < 7$. Cum restul și câtul sunt egale rezultă că $r = c$ și $n = 8 \cdot c$, $c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Numerele care verifică condițiile problemei sunt $8 \cdot 0$, $8 \cdot 1$, $8 \cdot 2$, ..., $8 \cdot 6$, iar suma lor este $8 \cdot (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 8 \cdot 7 \cdot 6 : 2 = \boxed{168}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

□

Problema 8

Andrei are 3 cămăși roșii, 3 cămăși albastre și 3 cămăși verzi într-un sertar. Fără a se uita, scoate la întâmplare cămăși din sertar pe rând. El ar dori un set de cămăși care conține fie 3 cămăși de aceeași culoare, fie 3 cămăși de culori diferite. Care este numărul minim de cămăși pe care Andrei trebuie să le scoată pentru a fi sigur că el are un astfel de set?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

Demonstrație. Dacă scoate doar 3 cămăși, atunci ar putea ca două să fie de o culoare și a treia din altă culoare, situație care nu convine. Dacă scoate 4 cămăși se poate ca două să fie de o culoare și două de altă culoare, situație care iarăși nu convine. Dacă scoate 5 cămăși, cel puțin una dintre situații este îndeplinită. Se poate să fie câte una din fiecare culoare și una dintre condiții este îndeplinită. În caz contrar, cele 5 cămăși sunt de două culori, asta însemnând că 3 sunt de o culoare și două de altă culoare, situație care convine din nou. Se poate să aibă loc și ambele cazuri, de exemplu, 3 cămăși roșii, o cămașă albastră și una verde.Așadar, numărul minim de cămăși pe care trebuie să le scoată Andrei este $\boxed{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ 5p

□

Problema 9

Într-o secvență de 7 numere primul termen este 3, iar următoarele se obțin prin mărirea cu 7 a fiecărui termen. Ultimii 3 termeni din șir sunt:

a) $3, 10, 17$ b) $24, 31, 38$ c) $31, 38, 45$ d) $32, 39, 46$

Demonstrație. Numerele din șir sunt 3, $3 + 7$, $3 + 7 \cdot 2$, ..., $3 + 7 \cdot 6$. Ultimele trei numere din șir sunt $\boxed{31, 38, 45}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ 5p

□

Problema 10

În ecuația $\overline{ab}+ \overline{ccc}+ \overline{ccc} = 2022$ literele a, b și c reprezintă cifre. Valoarea sumei $a + b + c$ este egală cu:

a) 21 b) 4 c) 12 d) 15

Demonstrație. Cum $\overline{ab} \leq 99 \implies 2 \cdot \overline{ccc} \geq 2022 - 99 \iff \overline{ccc} \geq 1923 : 2 \implies \overline{ccc} \geq 962 \implies \overline{ccc} = 999$. Înlocuind în relația inițială rezultă că $\overline{ab} = 24$. Valoarea sumei $a + b + c$ este egală cu $\boxed{15}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ 5p

□

Problema 11

Dacă la un concurs de alergări îl depășești pe cel de pe a doua poziție, atunci te afli pe poziția:

a) a I-a b) a II-a c) a III-a d) a IV-a

Demonstrație. Înainte de a depăși concurentul de pe poziția a II-a, te aflai pe poziția a III-a. După ce îl depășești te afli pe poziția $\boxed{\text{a II-a}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 12

Luca face o băutură răcoritoare pentru a o vinde la o strângere de fonduri la școală. Rețeta lui necesită de 4 ori mai multă apă decât suc de portocale și de două ori mai mult suc de portocale decât suc de lămâie. El folosește 3 căni de suc de lămâie. De câte căni de apă are nevoie?

a) 8 b) 12 c) 16 d) 24

Demonstrație. La 3 căni de suc de lămâie sunt necesare $3 \cdot 2 = 6$ căni de suc de portocale. La 6 căni de suc de portocale sunt necesare $6 \cdot 4 = 24$ căni de apă. Luca are nevoie de $\boxed{24}$ căni de apă.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 13

Patru prieteni stau la rând în ordinea Andrei, Bianca, Cristi și Diana pentru a face o poză. Apoi ei se mută astfel încât Andrei nu este pe primul loc, Bianca nu este pe al doilea loc, Cristi nu este pe al treilea loc și Diana nu este pe al patrulea loc. În câte moduri pot face cei patru prieteni asta? Adică în câte moduri se pot rearanja astfel încât niciunul nu este pe poziția inițială?

a) 6 b) 9 c) 12 d) 18

Demonstrație. Vom nota cei patru copii cu A, B, C, respectiv D, conform inițialelor numelor fiecăruia.
A poate ocupa oricare dintre pozițiile 2, 3 sau 4, adică are 3 variante de ocupare a locului. Copilului de pe poziția pe care a ocupat-o A îi rămân 3 posibilități de ocupare a locului pentru că cea pe care nu are voie să o ocupe este ocupată deja de A. Pentru ultimii doi copii mai rămâne o singură variantă de așezare.
Un exemplu este următorul: A ocupă locul lui B.

- Dacă B ocupă locul lui A, atunci C și D schimbă locurile între ei și obținem așezarea $BADC$.
- Dacă B ocupă locul lui C, copilul D trebuie să își schimbe locul și are o singură variantă, în locul lui A, iar C se mută în locul lui D și obținem așezarea $DABC$.

- Dacă B ocupă locul lui D, copilul C are o singură variantă, în locul lui A, iar D merge în locul lui C și obținem așezarea $CADB$.

Așadar, pentru fiecare alegere pe care o face A se obțin 3 aranjări. Cum A poate alege locul în 3 moduri distincte, obținem că numărul de moduri în care se pot rearanja cei 3 copii este $3 \times 3 = \boxed{9}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 14

În lista p, q, r, s, t, u, v, w fiecare literă reprezintă un număr natural nenul. Suma oricăror patru numere vecine este 35. Știind că $q + v = 15$, care este cea mai mare valoare pe care o poate lua p?

a) 15 b) 19 c) 20 d) 23

Demonstrație. Din relațiile $p + q + r + s = 35$ și $q + r + s + t = 35$, obținem că $p = t$. Repetând raționamentul obținem $q = u$, $r = v$ și $s = w$, adică lista de numere este p, q, r, s, p, q, r, s. Relația $q + v = 15$ devine $q + r = 15$, iar din $p + q + r + s = 35$ rezultă $p + s = 20$. Știm că numerele sunt nenule, deci p ia cea mai mare valoare atunci când s este cea mai mică, adică 1 și valoarea maximă a lui p este $\boxed{19}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 15

Scriem în ordine crescătoare numerele naturale nenule în următorul tabel cu cinci coloane, astfel:

A	B	C	D	E
1		2		3
	4		5	
6		7		8
	9		10	
11		12		13

...

În ce coloană apare numărul 300?

a) A b) C c) E d) D

Demonstrație. Pe coloana A sunt scrise numere de forma $5k + 1$, pe coloana B sunt numere de forma $5k + 4$, pe coloana C sunt numerele de forma $5k + 2$, pe coloana D sunt numerele de forma $5k$, iar pe coloana E sunt cele de forma $5k + 3$. Cum $300 = 5 \cdot 60$, obținem că numărul 300 se află pe coloana $\boxed{D}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 16

Câte numere naturale de cinci cifre conțin cel puțin o cifră impară în reprezentarea lor zecimală?

a) 87500 b) 3125 c) 45000 d) 86875

Demonstrație. Sunt $99999 - 9999 = 90000$ numere de cinci cifre. Pentru a le afla pe cele care conțin cel puțin o cifră impară, vom afla câte numere de cinci cifre nu conțin nicio cifră impară, adică cele care sunt scrise doar cu cifre pare. Vom afla câte numere de forma $\overline{abcde}$ sunt scrise doar cu cifre pare. Cifra a poate fi oricare dintre cifrele $2, 4, 6, 8$, iar fiecare dintre celelalte patru cifre poate lua oricare dintre valorile $0, 2, 4, 6, 8$. Aplicând regula produsului avem că $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500$ sunt scrise doar cu cifre pare și cele care sunt scrise cu cel puțin o cifră pară sunt în număr de $90000 - 2500 = \boxed{87500}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ 5p

□

Problemele 1-16: . . . . $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: . . . . $20p$
Total: . . . . $100p$

Timp de lucru: . . . . 2 ore