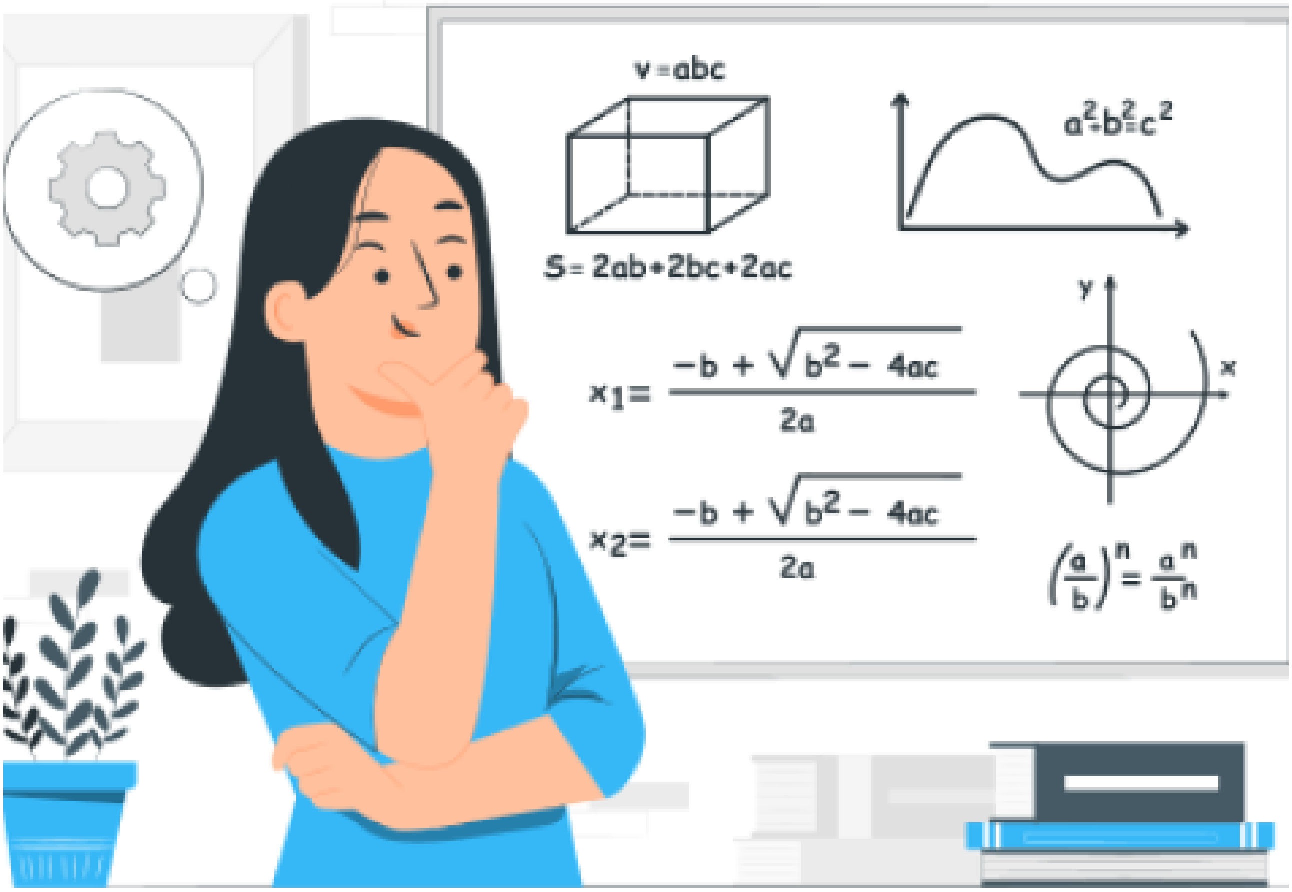



# Concursul de matematică Upper.School
# Ediția 2022-2023

## Etapa I
## Clasa a VI-a

## - Soluții -
Lioara Ivanovici

# §1 Soluții

**Problema 1**

Suma divizorilor primi ai lui 84 este egală cu:

a) 12 b) 14 c) 13 d) 15

*Demonstrație.* Descompunerea în factori primi a numărului 84 este $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, deci divizorii primi ai lui 84 sunt 2, 3 și 7. Suma lor este $2 + 3 + 7 = \boxed{12}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{a)}}$ ............................................................ 5$p$

□

**Problema 2**

Valoarea numărului natural $n$ pentru care $\{3 \cdot n + 1,\ n + 4\} = \{6, 7\}$ este egală cu:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

*Demonstrație.* Pentru ca două mulțimi să fie egale trebuie să aibă aceleași elemente. Numărul $3 \cdot n + 1$ nu poate fi egal cu 6 pentru că $6 \,\vdots\, 3$, dar $3 \cdot n + 1$ dă restul 1 la împărțirea prin 3. Singura opțiune este $3 \cdot n + 1 = 7 \iff 3 \cdot n = 6 \iff \mathrm{n} = 2$. Valoarea numărului natural $n$ pentru care cele două mulțimi sunt egale este $\boxed{2}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{a)}}$ ............................................................ 5$p$

□

**Problema 3**

Dacă mulțimea $A$ are 32 de submulțimi, atunci cardinalul lui $A$ este egal cu:

a) 32 b) 16 c) 6 d) 5

*Demonstrație.* Dacă o mulțime $A$ are cardinalul $n$, atunci numărul de submulțimi ale mulțimii $A$ este egal cu $2^n$. Cum $32 = 2^5$ obținem că mulțimea $A$ are cardinalul egal cu $\boxed{5}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{d)}}$ ............................................................ 5$p$

□

**Problema 4**

Care este suma numerelor naturale conținute de mulțimea

$$A = \left\{ \frac{n+101}{n+10} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} ?$$

a) 112 b) 2 c) 10 d) 84

*Demonstrație.* $\dfrac{n+101}{n+10} = \dfrac{n+10}{n+10} + \dfrac{91}{n+10} = 1 + \dfrac{91}{n+10} \in \mathbb{N} \iff n + 10 \mid 91 = 7 \cdot 13.$

Divizorii lui 91 sunt 1, 7, 13 și 91. Cum $n + 10 \geq 10$ obținem 2 variante posibile:

- $n + 10 = 13 \iff n = 3$
- $n + 10 = 91 \iff n = 81.$

Pentru aceste valori elementele naturale ale mulțimii $A$ sunt 8 și 2, iar suma lor este $\boxed{10}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{c)}}$ ............................................................ $5p$

□

**Problema 5**

Care este cea mai mare dintre fracțiile următoare?

a) $\dfrac{3+8}{5}$ b) $\dfrac{8}{3+5}$ c) $\dfrac{5+8}{3}$ d) $\dfrac{5}{8+3}$

*Demonstrație.* Fracția $\dfrac{8}{3+5}$ este echiunitară, fracția $\dfrac{5}{8+3}$ este subunitară, mai avem de comparat celelalte două fracții.

$$\frac{3+8}{5} = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}.$$
$$\frac{5+8}{3} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}.$$

Este suficient să ne uităm la părțile lor întregi și obținem că fracția cea mai mare este $\boxed{\dfrac{5+8}{3}}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{c)}}$ ............................................................ $5p$

□

**Problema 6**

Raportul a două numere este egal cu 3, iar suma lor este 36. Diferența dintre numărul mai mare și numărul mai mic este egală cu:

a) 18 b) 20 c) 12 d) 24

*Demonstrație.* Vom nota cu $a$ și $b$ cele două numere. Din $\dfrac{a}{b} = 3 \implies a = 3b$. Înlocuim în $a + b = 36$ pe $a$ cu $3b$ și obținem $3b + b = 36 \iff 4b = 36 \iff b = 9$ și $a = 3 \cdot 9 = 27$. Diferența pozitivă a celor două numere este $a - b = 27 - 9 = \boxed{18}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{a)}}$ ............................................................ $5p$

□

**Problema 7**

Trei copii au mâncat împreună 17 nuci. Andrei a mâncat cel mai mult dintre toți. Care este cel mai mic număr de nuci pe care ar fi putut să le mănânce Andrei?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 9

*Demonstrație.* Vom nota cu $x$, $y$, respectiv $z$ numărul de nuci pe care le-a mâncat fiecare dintre copii, iar $x$ este numărul de nuci pe care le-a mâncat Andrei.
$x + y + z = 17$, dar $x > y$ și $x > z$, de unde obținem că $17 = x + y + z < 3x \implies x \geq 6$.

Dar pentru $x = 6$ afirmația nu mai adevărată pentru că mai rămân 11 nuci și în cel mai bun caz unul dintre ceilalți doi copii a mâncat 6, iar celălalt 5, adică nu este Andrei copilul care a mâncat cel mai mult. Pentru $x = 7$ mai rămân 10 nuci, caz în care este posibil ca fiecare dintre ceilalți doi copii să fi mâncat mai puțin decât Andrei. Cel mai mic număr de nuci pe care ar fi putut să le mănânce Andrei este $\boxed{7}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{c)}}$ .............................................................. $5p$

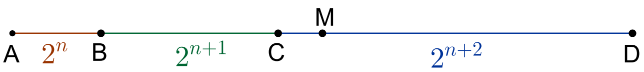
□

## Problema 8

Se consideră punctele $B$ și $C$ pe segmentul $(AD)$, astfel încât $AB = 2^n$ cm, $BC = 2^{n+1}$ cm, $CD = 2^{n+2}$ cm, $n \in \mathbb{N}^*$ și $M$ este mijlocul segmentului $(AD)$. Dacă $AD = 112$ cm, care este lungimea segmentului $(CM)$?

a) 56 cm    b) 32 cm    c) 40 cm    d) 8 cm

*Demonstrație.*




Pentru că $BC > AB$ rezultă că $C \in (BD)$.
$AD = AB + BC + CD = 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} \iff 112 = 2^n \cdot (1 + 2 + 4) \iff 2^n = 112 : 7 \iff 2^n = 16 \iff n = 4$. De aici avem că $AB = 2^4 = 16$ cm, $BC = 2^5 = 32$ cm și $CD = 2^6 = 64$ cm. Cum $M$ este mijlocul segmentului $(AD) \implies AM = \dfrac{AD}{2} = 56$ cm. Punctul $M$ se află între $C$ și $D$ pentru că $AM > AC$, de unde $CM = AM - AC = 56 - 16 - 32 = \boxed{8 \text{ cm}}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{d)}}$ .............................................................. $5p$

□

## Problema 9

Dacă $a$ și $b$ sunt numere prime, iar $[2a, 3b] = 858$, atunci valoarea sumei $a + b$ este egală cu: (Am notat cu $[2a, 3b]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor $2a$ și $3b$).

a) 143    b) 24    c) 144    d) 59

*Demonstrație.* Știm că $(x, y) \cdot [x, y] = x \cdot y$. Înlocuim $[2a, 3b]$ în relația din ipoteză și obținem $\dfrac{2a \cdot 3b}{(2a, 3b)} = 858 \iff 2a \cdot 3b = 858 \cdot (2a, 3b)$. Cum $858 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$, obținem $a \cdot b = 11 \cdot 13 \cdot (2a, 3b)$. De aici rezultă $11 \mid a \cdot b$, dar 11 este număr prim $\implies 11 \mid a$ sau $11 \mid b$. Analog rezultă și că $13 \mid a$ sau $13 \mid b$. Cum $a$ și $b$ sunt numere prime, rezultă că $\{a, b\} = \{11, 13\}$ și $a + b = \boxed{24}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{b)}}$ .............................................................. $5p$

□

**Problema 10**

Mulțimile $A$ și $B$ verifică simultan condițiile:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
- $A - (A \cap B) = \{1, 2\}$;
- $B - (A \cap B) = \{5, 7\}$.

Mulțimea $A$ este egală cu:

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  b) $A = \{1, 2, 4, 6\}$

c) $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$  d) $A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

*Demonstrație.* $A - (A \cap B) = \{1, 2\} \implies 1, 2 \in A$ și $1, 2 \notin B$;
$B - (A \cap B) = \{5, 7\} \implies 5, 7 \in B$ și $5, 7 \notin A$;
$3 \in A \cup B \implies 3 \in A$ sau $3 \in B$. Dacă $3 \notin A \cap B \implies 3 \in A - (A \cap B)$ sau $3 \in B - (A \cap B)$, fals. Așadar, $3 \in A \cap B$. La fel se demonstrează și că $4, 6 \in A \cap B$.
În concluzie, $\boxed{A = \{1, 2, 3, 4, 6\}}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{c)}}$ ........................................................................ $5p$

□

**Problema 11**

Câte numere naturale $A$ de 4 cifre există astfel încât jumătatea lui este divizibilă cu 2, treimea este divizibilă cu 3 și cincimea lui $A$ este divizibilă cu 5.

a) 8  b) 9  c) 10  d) 11

*Demonstrație.* Căutăm numerele $A = \overline{abcd}$ pentru care:

- $\dfrac{A}{2} \vdots 2 \iff A \vdots 4$,
- $\dfrac{A}{3} \vdots 3 \iff A \vdots 9$,
- $\dfrac{A}{5} \vdots 5 \iff A \vdots 25$.

Cum numerele 4, 9 și 25 sunt prime între ele, oricare două, rezultă că $A \vdots 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900$. Numerele de patru cifre care sunt divizibile cu 900 sunt $900 \cdot 2$, $900 \cdot 3, ..., 900 \cdot 11$, în total $\boxed{10}$ numere.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{c)}}$ ........................................................................ $5p$

□

**Problema 12**

Cel mai mic număr natural nenul $k$ pentru care $9^2$ divide numărul de $k$ cifre $\underbrace{99.....9}_{\text{k cifre}}$ are valoarea egală cu:

a) 9  b) 18  c) 81  d) 3

*Demonstrație.* $\underbrace{99.....9}_{\text{k cifre}} = 9 \cdot \underbrace{11.....1}_{\text{k cifre}} \vdots 9^2 \iff \underbrace{11.....1}_{\text{k cifre}} \vdots 9 \iff \underbrace{1+1+...+1}_{\text{k cifre}} \vdots 9 \iff k \vdots 9.$

Cea mai mică valoare a lui $k$ este $\boxed{9}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{a)}}$ ........................................................ 5$p$

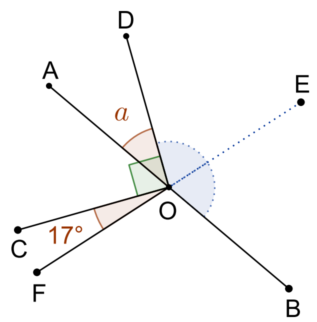
□

**Problema 13**

Se dau unghiurile $\angle AOD$ și $\angle DOB$ adiacente suplementare cu $m(\angle AOD) < m(\angle DOB)$. Fie $(OF$ semidreapta opusă bisectoarei $\angle BOD$ și în același semiplan cu $(OF$ față de dreapta $AB$ se consideră semidreapta $(OC$ perpendiculară pe $(OD$. Să se afle măsura unghiului $\angle AOD$ dacă măsura unghiului $\angle COF$ este de $17°$.

a) $17°$ b) $34°$ c) $51°$ d) $73°$

*Demonstrație.*




Vom nota cu $a = m(\angle AOD)$.

$m(\angle AOD) + m(\angle BOD) = 180° \iff m(\angle BOD) = 180° - a$. In plus, cum $m(\angle AOD) < m(\angle DOB) \implies m(\angle AOD) < 90°$.

Vom nota cu $(OE$ bisectoarea unghiului $\angle BOD$ și obținem $m(\angle BOE) = 90° - \frac{a}{2}$.

$\angle AOF \equiv \angle BOE$ fiind unghiuri opuse la vârf, deci $m(\angle AOF) = 90° - \frac{a}{2}$. (1)

$OC \perp OD \implies m(\angle COD) = 90°$, iar $m(\angle AOC) = 90° - m(\angle AOD) = 90° - a$. (2)

Din (1) și (2) obținem $m(\angle AOC) < m(\angle AOF) \implies (OC \subset Int(\angle AOF)$. Din (1) avem $m(\angle AOF) = m(\angle AOC) + m(\angle COF) \iff 90° - \frac{a}{2} = 90° - a + 17° \iff 17° = \frac{a}{2} \iff$ $a = 34°$. Așadar, măsura unghiului $\angle AOD$ este egală cu $\boxed{34°.}$

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{b)}}$ ........................................................ 5$p$

□

**Problema 14**

Pentru câte perechi de numere naturale $(a, b)$ numerele $\frac{a-2022}{b}$ și $\frac{b+1}{a-2022}$ sunt numere naturale?

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1

*Demonstrație.* Deoarece fracțiile sunt numere naturale rezultă că și produsul lor $\frac{b+1}{b}$ este număr natural, adică $\frac{1}{b} + \frac{b}{b} = 1 + \frac{1}{b} \in \mathbb{N} \implies b = 1$. Atunci $\frac{2}{a-2022}$ este număr natural dacă și numai dacă $a - 2022 \in \{1, 2\}$, adică $a \in \{2023, 2024\}$. Numărul perechilor $(a, b)$ este $\boxed{2}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{c)}}$ .................................................................. $5p$

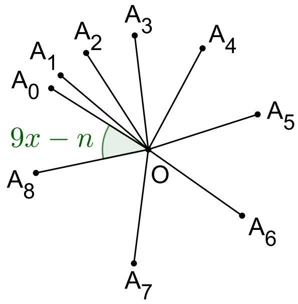
□

**Problema 15**

Unghiurile $\angle A_0OA_1$, $\angle A_1OA_2$, $\angle A_2OA_3, \ldots, \angle A_7OA_8$ și $\angle A_8OA_0$ sunt unghiuri în jurul punctului $O$. Dacă $m(\angle A_0OA_1) = x^\circ$, $m(\angle A_1OA_2) = (2x+1)^\circ$, $m(\angle A_2OA_3) = (3x+2)^\circ, \ldots, m(\angle A_7OA_8) = (8x+7)^\circ$ și m$(\angle A_8OA_0) = (9x-n)^\circ$, unde $x$ și $n$ sunt numere naturale nenule. Care este cea mai mică valoarea a numărului $n$?

a) 28 b) 34 c) 38 d) 42

*Demonstrație.*




Avem $x + 2x + 1 + 3x + 2 + \ldots 8x + 7 + 9x - n = 360^\circ$, de unde $45x + 28 - n = 360^\circ$. Cum $45x$ și 360 se divid cu 45, rezultă că $28 - n$ se divide cu 45. Obținem, astfel, că $28 - n = 45k, k \in \mathbb{Z}$. Adică $n = 28 - 45k, k \in \mathbb{Z}$, dar $n$ este număr natural și cea mai mică valoare a sa se obține pentru $k = 0$. Atunci $x = 8$ și $\boxed{\text{n} = 28}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{a)}}$ .................................................................. $5p$

□

**Problema 16**

Dacă $a$, $b$, $c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\dfrac{a+b}{a} = 2022$ și $\dfrac{b+c}{c} = 2023$, atunci valoarea fracției $\dfrac{a-c}{c}$ este egală cu:

a) $\dfrac{2022}{2021}$ b) $\dfrac{2021}{4}$ c) $\dfrac{1}{2021}$ d) $\dfrac{1}{1011}$

*Demonstrație.*

- $\dfrac{a+b}{a} = 2022 \iff \dfrac{a}{a} + \dfrac{b}{a} = 2022 \iff 1 + \dfrac{b}{a} = 2022 \iff \dfrac{b}{a} = 2021 \iff \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2021}$.
- $\dfrac{b+c}{c} = 2023 \iff \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{c} = 2023 \iff \dfrac{b}{c} + 1 = 2023 \iff \dfrac{b}{c} = 2022.$

Obținem $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{b}{c} = \dfrac{1}{2021} \cdot 2022 = \dfrac{2022}{2021}$. De aici, $\dfrac{a-c}{c} = \dfrac{a}{c} - \dfrac{c}{c} = \dfrac{2022}{2021} - 1 = \boxed{\dfrac{1}{2021}}$.

**Răspuns corect:** $\boxed{\text{c)}}$ .................................................................. $5p$

□

**Problemele 1-16:** ........ $16 \times 5p = 80p$
**Puncte acordate din oficiu:** ........ $20p$
**Total:** ........ $100p$

**Timp de lucru:** ........ 2 ore