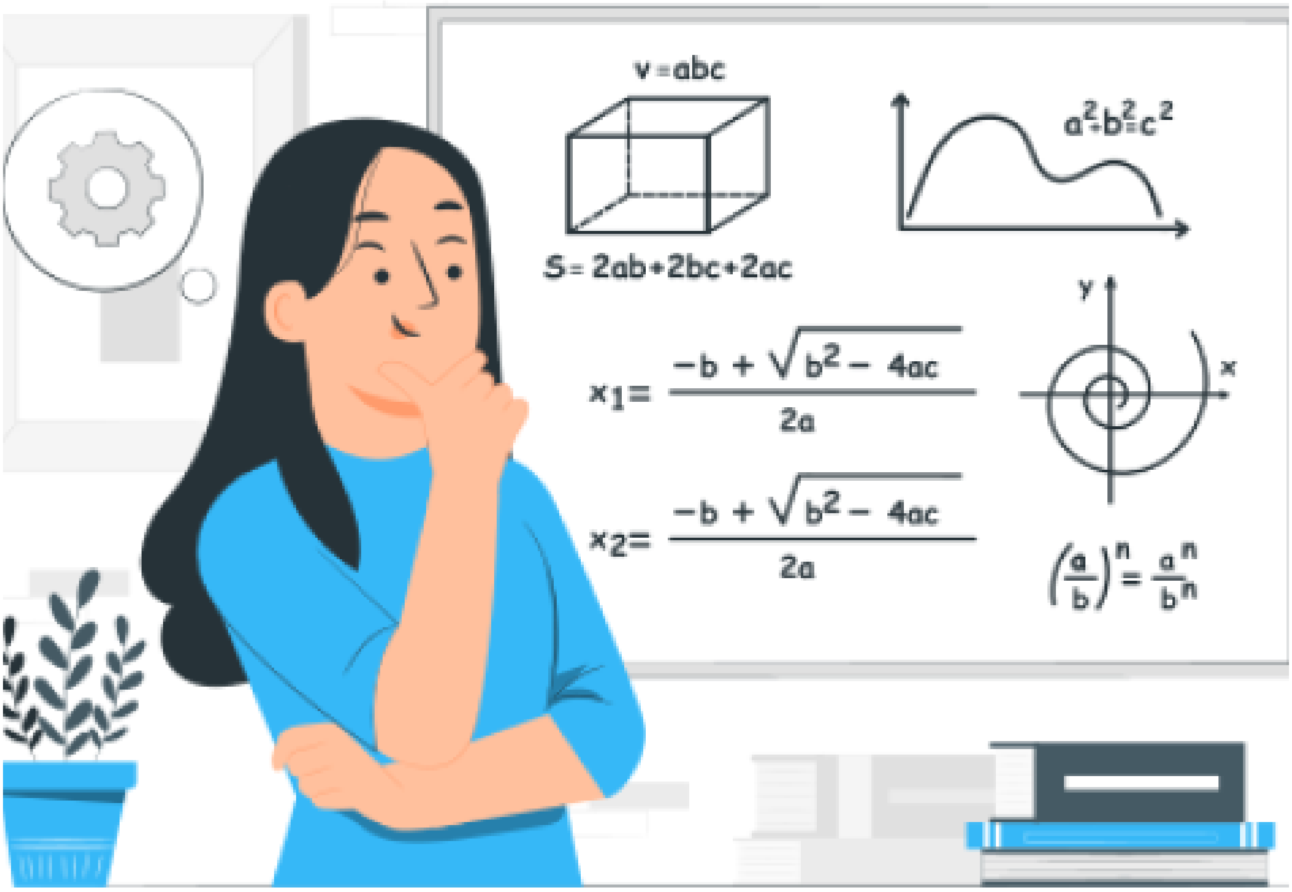


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022-2023

Etapa I
Clasa a VII-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

,

Problema 1

Aflați suma numerelor întregi x care sunt soluții ale inecuației $1 + 8x \leq 358 - 2x \leq 6x + 94$.

a) 138 b) 67 c) 69 d) 102

Demonstrație. $1 + 8x \leq 358 - 2x \leq 6x + 94 \iff 1 + 8x \leq 358 - 2x$ și $358 - 2x \leq 6x + 94$.

- $1 + 8x \leq 358 - 2x \iff 10x \leq 357 \iff x \leq \dfrac{357}{10}$, dar $x \in \mathbb{Z} \implies x \leq 35$.
- $358 - 2x \leq 6x + 94 \iff 264 \leq 8x \iff \dfrac{264}{8} \leq x$, dar $x \in \mathbb{Z} \implies 33 \leq x$.

Am obținut astfel că valorile întregi ale lui x sunt 33, 34 și 35. Suma numerelor întregi care sunt soluții ale inecuației din enunț este $33 + 34 + 35 = \boxed{102}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 2

Media geometrică a numerelor $a = \sqrt{3}$ și $b = \sqrt{27}$ este egală cu:

a) 81 b) $3\sqrt{3}$ c) 3 d) 9

Demonstrație. $m_g = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}} = \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = \boxed{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 3

Media aritmetică a 2023 numere reale pozitive este 2022. Dacă suma a două dintre numere este 4044, să se determine media aritmetică a celorlalte 2021 numere reale.

a) $2021 \cdot 2022$ b) 2022 c) $2020 \cdot 2022$ d) 2020

Demonstrație. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ cele 2023 numere și $a_1 + a_2 = 4044$. Atunci:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2023}}{2023} = 2022 \iff$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2023} = 2022 \cdot 2023 \iff$$
$$a_3 + a_4 + \ldots + a_{2023} = 2022 \cdot 2023 - 4044 \iff$$
$$a_3 + a_4 + \ldots + a_{2023} = 2022 \cdot (2023 - 2) \iff$$
$$a_3 + a_4 + \ldots + a_{2023} = 2022 \cdot 2021.$$

Media aritmetică a celorlalte 2021 numere reale este

$$\frac{a_3 + a_4 + \ldots + a_{2023}}{2021} = \frac{2021 \cdot 2022}{2021} = \boxed{2022}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

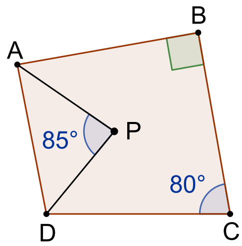
$\square$

Problema 4

Un patrulater convex $ABCD$ are măsura unghiului $\angle BCD$ egală cu $80°$. Bisectoarele unghiurilor $\angle BAD$ și $\angle ADC$ se intersectează în punctul P, iar măsura unghiului $\angle APD$ este de $85°$. Care este măsura unghiului $\angle ABC$?

a) $95°$ b) $105°$ c) $90°$ d) $100°$

Demonstrație.



În $\triangle APD$ suma măsurilor unghiurilor este de $180°$, deci $m(\angle PAD)+ m(\angle PDA) = 180° - m(\angle APD) = 180° - 85° = 95°$. Cum $(AP$ și $(DP$ sunt bisectoarele unghiurilor $\angle BAD$, respectiv $\angle ADC$, obținem:

$$m(\angle BAD) + m(\angle ADC) = 2 \cdot m(\angle PAD) + 2 \cdot m(\angle PDA) = 2 \cdot 95° = 190°.$$

În final:

$$m(\angle BAD) + m(\angle ADC) + m(\angle DCB) + m(\angle CBA) = 360° \iff$$

$$m(\angle ABC) = 360° - m(\angle BAD) - m(\angle ADC) - m(\angle DCB) = 360° - 190° - 80° = \boxed{90°}.$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

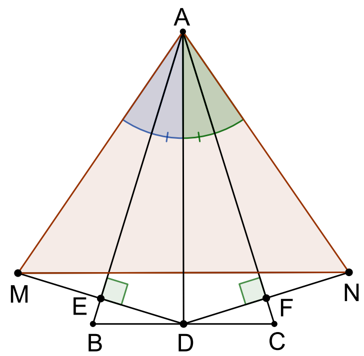
$\square$

Problema 5

În triunghiul ascuțitunghic $\triangle ABC$, bisectoarea unghiului $\angle BAC$ intersectează dreapta BC în punctul D. Dacă M și N sunt simetricele punctului D față de dreptele AB, respectiv AC, iar triunghiul $\triangle MAN$ este echilateral, determinați măsura unghiului $\angle BAC$.

a) $60°$ b) $30°$ c) $45°$ d) $12°$

Demonstrație.



Vom nota cu $\{E\} = DM \cap AB$ și $\{F\} = DN \cap AC$. $AB \perp MD$, $ME = ED \implies AB$ este mediatoarea lui $(MD) \implies \triangle AMD$ este isoscel cu $AM = AD$ și $(AE$ bisectoarea unghiului $\angle MAD \implies \angle MAE \equiv \angle DAE$. (1)
Analog obținem $\angle DAF \equiv \angle NAF$. (2)
Din (1) și (2) rezultă $m(\angle BAC) = m(\angle BAD) + m(\angle CAD) = \dfrac{m(\angle MAD)}{2} + \dfrac{m(\angle NAD)}{2} = \dfrac{m(\angle MAN)}{2} = \dfrac{60°}{2} = \boxed{30°}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 6

Fie $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2022} \in \{-1, 1\}$. Considerăm numerele $a_1 = x_1 \cdot x_2$, $a_2 = x_2 \cdot x_3, \ldots,$ $a_{2022} = x_{2022} \cdot x_1$. Valoarea produsului $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots\ a_{2022}$ este egală cu:

a) 0 b) -1 c) 2022 d) 1

Demonstrație. $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots\ a_{2022} = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots . \cdot x_{2022})^2 = \boxed{1}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 7

Valoarea numărului A, unde

$$A = \left(1 - \frac{1}{2^2 - 1}\right)\left(1 - \frac{1}{2^3 - 1}\right)\left(1 - \frac{1}{2^4 - 1}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{2^{2022} - 1}\right)$$

este $\dfrac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale prime intre ele. Rezultatul calculului $(b+1) : a$ este egal cu:

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 2^2 c) 2^{2022} d) 2

Demonstrație.

$$A = \left(1 - \frac{1}{2^2 - 1}\right)\left(1 - \frac{1}{2^3 - 1}\right)\left(1 - \frac{1}{2^4 - 1}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{2^{2022} - 1}\right) \iff$$

$$A = \frac{2^2 - 2}{2^2 - 1} \cdot \frac{2^3 - 2}{2^3 - 1} \cdot \frac{2^4 - 2}{2^4 - 1} \cdot \ldots . \cdot \frac{2^{2022} - 2}{2^{2022} - 1} \iff$$

$$A = \frac{2 \cdot (2 - 1)}{2^2 - 1} \cdot \frac{2 \cdot (2^2 - 1)}{2^3 - 1} \cdot \frac{2 \cdot (2^3 - 1)}{2^4 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{2 \cdot (2^{2021} - 1)}{2^{2022} - 1}.$$

După simplificare obținem $A = \dfrac{2^{2021}}{2^{2022} - 1}$. Numerele 2^{2021} și $2^{2022} - 1$ sunt prime între ele pentru că primul are ca factor prim în descompunere doar pe 2 și al doilea este număr impar, deci $a = 2^{2021}$ și $b = 2^{2022} - 1$. De aici avem $(b+1) : a = (2^{2022} - 1 + 1) : 2^{2021} = \boxed{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

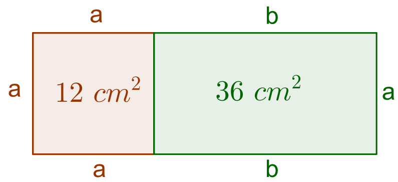
Problema 8

Într-un dreptunghi se duce o paralelă la una din laturi, care îl împarte în două dreptunghiuri cu ariile de 12 cm^2 și respectiv 36 cm^2. Să se afle perimetrul maxim al dreptunghiului inițial, știind că unul dintre cele două dreptunghiuri este pătrat.

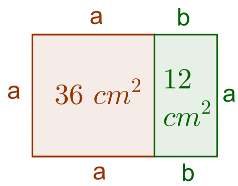
a) $10\sqrt{3}$ b) $20\sqrt{3}$ c) 28 d) 34

Demonstrație. Este evident că paralela se duce la latura mai mică a dreptunghiului. Vom nota cu a latura pătratului și cu b a doua dimensiune a dreptunghiului care se obține prin trasarea paralelei.

- dacă pătratul din descompunere are aria egală cu 12 cm^2, atunci $a^2 = 12 \iff a = 2\sqrt{3}$. Din $a \cdot b = 36$ cm^2 $\implies b = \dfrac{36}{2\sqrt{3}} \iff b = 6\sqrt{3}$. Dimensiunile dreptunghiului mare sunt $2\sqrt{3}$ și $8\sqrt{3}$, de unde perimetrul este $20\sqrt{3}$ cm.



- dacă pătratul din descompunere are aria egală cu 36 cm^2, atunci $a^2 = 36 \iff a = 6$. Din $a \cdot b = 12$ cm^2 $\implies b = \dfrac{12}{6} \iff b = 2$. Dimensiunile dreptunghiului mare sunt 6 și 8, de unde perimetrul este 28 cm.



Vom demonstra că $20\sqrt{3} > 28 \iff 5\sqrt{3} > 7 \iff 75 > 49$, inegalitate adevărată, de unde concluzionăm că perimetrul maxim al dreptunghiului inițial este $\boxed{20\sqrt{3}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

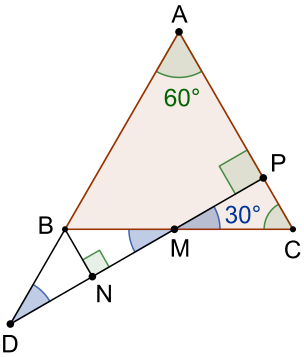
□

Problema 9

În triunghiul echilateral $\triangle ABC$ considerăm punctul $M \in (BC)$. Fie $MP \perp AC$, $P \in AC$ și $MP \cap AB = \{D\}$. Știind că $AB = 488$ cm și $CP = 127$ cm, aflați lungimea segmentului (BN), unde N este mijlocul segmentului (DM).

a) 361 cm b) 127 cm c) 117 cm d) 244 cm

Demonstrație.



În $\triangle PMC$ obținem $m(\angle CMP) = 180° - m(\angle MPC) - m(\angle MCP) = 180° - 90° - 60° = 30°$. Unghiurile $\angle CMP$ și $\angle BMN$ sunt opuse la vârf, deci sunt congruente $\implies m(\angle BMN) = 30°$. Pe de altă parte, unghiul $\angle MBD$ este unghi exterior triunghiului $\triangle ABC \implies m(\angle MBD) = 180° - m(\angle ABC) = 180° - 60° = 120°$. În $\triangle MBD$ obținem $m(\angle BDM) = 180° - m(\angle DBM) - m(\angle BMD) = 180° - 120° - 30° = 30°$. Cum $\angle BDM \equiv \angle BMD \implies \triangle BDM$ este isoscel cu $(BD) \equiv (BM)$, deci mediana (BN) este și înălțime, de unde obținem $BN \perp DM$.
În $\triangle MPC$ aplicăm teorema unghiului de 30° și rezultă $MC = 2 \cdot PC = 254$ cm. În plus, $BM = BC - MC = 488 - 254 = 234$ cm. Vom aplica încă o dată teorema unghiului de 30° în $\triangle MNB \implies BN = \dfrac{BM}{2} = \dfrac{234}{2} = \boxed{117 \text{ cm}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ 5p

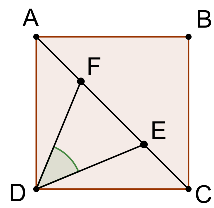
□

Problema 10

Fie pătratul $ABCD$. Pe diagonala (AC) se consideră punctele E și F, astfel încât $AE = CF = AB$. Măsura unghiului $\angle EDF$ este egală cu:

a) 30° b) 45° c) 60° d) 75°

Demonstrație.



Știm că toate cele patru laturi ale unui pătrat sunt congruente, de unde rezultă că $AD = AE \implies \triangle ADE$ este isoscel de bază DE, deci $\angle ADE \equiv \angle AED$. În triunghiul dreptunghic isoscel $\triangle ADC$ obținem $m(\angle DAC) = 45°$. Determinăm măsura unghiului $\angle AED$ in $\triangle AED$: $m(\angle AED) = \dfrac{180° - m(\angle DAE)}{2} = \dfrac{180° - 45°}{2} = 67°30'$. În mod similar se determină și $m(\angle DFC)$ în $\triangle CDF$. În final, obținem $m(\angle EDF) = 180° - m(\angle DEF) - m(\angle DFE) = 180° - 67°30' - 67°30' = \boxed{45°}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ 5p

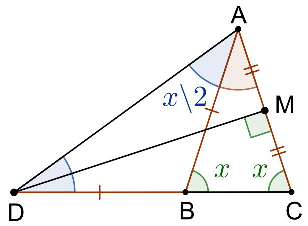
□

Problema 11

Pe segmentul (CD) se consideră punctul B, iar în afara dreptei CD considerăm punctul A astfel încât $AB = AC = BD$. M este mijlocul segmentului (AC) și $DM \perp AC$. Măsura unghiului $\angle BAC$ este egală cu:

a) $72°$ b) $18°$ c) $36°$ d) $54°$

Demonstrație.



$AB = AC \implies \triangle ABC$ este isoscel de bază $(BC) \implies \angle ABC \equiv \angle ACB$. Vom nota $m(\angle ACB) = x$. Unghiul $\angle ABC$ este unghi exterior triunghiului $\triangle ABD \implies m(\angle ABC) = m(\angle BAD) + m(\angle BDA)$. Dar $AB = BD \implies \triangle BAD$ este isoscel și $\angle BAD \equiv \angle BDA$. Obținem, astfel $m(\angle BAD) = \frac{x}{2}$.

În $\triangle ABC$ avem $m(\angle BAC) = 180° - m(\angle ACB) - m(\angle ABC) = 180° - 2x$, (1) deci $m(\angle CAD) = m(\angle CAB) + m(\angle BAD) = 180° - 2x + \frac{x}{2} = 180° - \frac{3x}{2}$.

În $\triangle DAC$ înălțimea DM este și mediană, deci $\triangle ADC$ este isoscel cu $DA = DC \implies \angle DAC \equiv \angle DCA \iff 180° - \frac{3x}{2} = x \iff 180° = \frac{5x}{2} \iff x = 72°$. În final, din (1) rezultă $m(\angle BAC) = \boxed{36°}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 12

Se consideră ecuația $\sqrt{x-2} + \sqrt{2-y} = 3$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$. Numărul de perechi (x, y) care sunt soluții ale ecuației este egal cu:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

Demonstrație. Dacă $a, b \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{N} \implies \sqrt{a} \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{b} \in \mathbb{N}$.

Din condiția de existență a radicalului obținem $x \geq 2$ și $y \leq 2$. În plus, cum $\sqrt{x-2} + \sqrt{2-y} = 3$ și $\sqrt{2-y} \geq 0 \implies \sqrt{2-y} \leq 3$.

- $\sqrt{2-y} = 0 \iff 2 - y = 0 \iff y = 2$ și $\sqrt{x-2} = 3 \iff x - 2 = 9 \iff x = 11$.
- $\sqrt{2-y} = 1 \iff 2 - y = 1 \iff y = 1$ și $\sqrt{x-2} = 2 \iff x - 2 = 4 \iff x = 6$.
- $\sqrt{2-y} = 2 \iff 2 - y = 4 \iff y = -2$ și $\sqrt{x-2} = 1 \iff x - 2 = 1 \iff x = 3$.
- $\sqrt{2-y} = 3 \iff 2 - y = 9 \iff y = -7$ și $\sqrt{x-2} = 0 \iff x - 2 = 0 \iff x = 2$.

Soluțiile sunt $(x, y) \in \{(11, 2),\ (6, 1),\ (3, -2),\ (2, -7)\}$, deci numărul de perechi care sunt soluții ale ecuației este $\boxed{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 13

Determinați suma cifrelor a și b astfel încât

$$\sqrt{\overline{b7b}} = \overline{ab}.$$

a) 13 b) 7 c) 8 d) 12

Demonstrație. $\sqrt{\overline{b7b}} = \overline{ab} \iff \overline{b7b} = \overline{ab}^2 \implies b \in \{0, 1, 5, 6\}$. Dar b este prima cifră a unui număr natural, deci nu poate fi 0. Rămâne să verificăm pentru celelalte valori.

- 171 nu este pătrat perfect pentru că se încadrează între pătratele perfecte consecutive 13^2 și 14^2;
- 575 nu este pătrat perfect pentru că se încadrează între pătratele perfecte consecutive 23^2 și 24^2.
- Pentru $b = 6$ obținem soluție pentru că $676 = 26^2$.

Suma cifrelor a și b este $\boxed{8}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 14

Valoarea numărului natural $\overline{abc}$ pentru care $\frac{2022}{\overline{abc}} = a - b + c$ este egală cu:

a) 677 b) 337 c) 373 d) 674

Demonstrație. Din $\frac{2022}{\overline{abc}} = a - b + c \implies \frac{2022}{\overline{abc}} \in \mathbb{N} \implies \overline{abc} \mid 2022$. Factorizarea lui 2022 este $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$, iar $\overline{abc}$ este număr de trei cifre. Divizorii de trei cifre ai numărului 2022 sunt 337 și 674. Pe de altă parte și $a - b + c \mid 2022$, de unde rezultă că soluția unică a problemei este $\boxed{\overline{abc} = 674}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

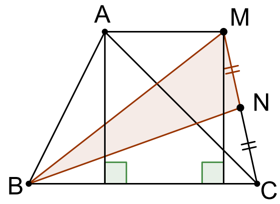
□

Problema 15

Fie $\triangle ABC$ un triunghi de arie 10 cm^2. Dacă $AM \parallel BC$ și N este mijlocul segmentului (CM), atunci aria triunghiului $\triangle BMN$ este egală cu:

a) $\frac{10}{3}$ cm^2 b) 5 cm^2 c) 10 cm^2 d) $\frac{5}{2}$ cm^2

Demonstrație.



$AM \parallel BC \implies d(A, BC) = d(M, BC) \implies \mathcal{A}_{BMC} = \frac{BC \cdot d(M, BC)}{2} = \frac{BC \cdot d(A, BC)}{2} = \mathcal{A}_{ABC} = 10 \text{ cm}^2$. Știm că mediana împarte un triunghi în două triunghiuri echivalente (au aceeași arie), deci $\mathcal{A}_{BMN} = \frac{\mathcal{A}_{BMC}}{2} = \boxed{5 \text{ cm}^2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

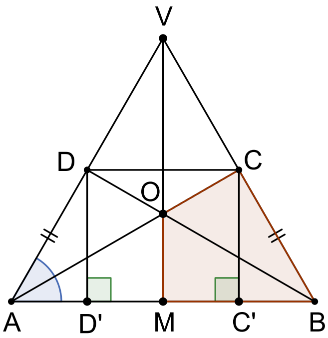
□

Problema 16

Se dă trapezul $ABCD$ în care $AB \parallel CD$, $AD = CD = BC$, $m(\angle A) = 60°$, M este mijlocul lui (AB) și $AC \cap BD = \{O\}$. Raportul ariilor patrulaterelor $BMOC$ și $ABCD$ este egal cu:

a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{9}$

Demonstrație.



Vom nota cu $\{V\} = AD \cap BC$. Cum $ABCD$ este trapez isoscel obținem că $\angle VAB \equiv \angle VBA \implies \triangle VAB$ este isoscel cu un unghi de $60° \implies \triangle VAB$ este echilateral.
Construim $DD' \perp AB$, $D' \in AB$ și aplicăm teorema unghiului de $30°$ în $\triangle ADD' \implies AD' = \frac{AD}{2}$. Construim și $CC' \perp AB$, $C' \in AB$ și, în mod, similar obținem $CC' = \frac{BC}{2}$. În plus, $DD' \parallel CC'$ (drepte perpendiculare pe aceeași dreaptă), $DC \parallel D'C' \implies DD'C'C$ este paralelogram și $DC = D'C'$. Obținem astfel $AB = AD' + D'C' + C'B = 2 \cdot DC$, deci $DC = \frac{AB}{2}$, $DC \parallel AB \implies (DC)$ este linie mijlocie în $\triangle VAB$ (reciproca teoremei liniei mijlocii), deci D este mijlocul lui (VA) și C este mijlocul lui $(VB) \implies AC$ este mediană. La fel rezultă și că (BD) este mediană, deci punctul O este centrul de greutate al triunghiului $\triangle VAB$.
Știm că mediana împarte un triunghi în două triunghiuri de suprafețe egale, deci $\mathcal{A}_{OAM} = \mathcal{A}_{OBM} = \mathcal{A}_{OBC} = \mathcal{A}_{OVC} = \mathcal{A}_{OVD} = \mathcal{A}_{OAD} = a$. Deci, $\mathcal{A}_{BMOC} = \mathcal{A}_{OMB} + \mathcal{A}_{OCB} = 2a$.
Pe de altă parte $\mathcal{A}_{VDC} = \frac{\mathcal{A}_{VDB}}{2} = \frac{\mathcal{A}_{VAB}}{4} = \frac{6a}{4} = \frac{3a}{2} \implies \mathcal{A}_{ABCD} = 6a - \frac{3a}{2} = \frac{9a}{2}$.
În cele din urmă, $\frac{\mathcal{A}_{BMOC}}{\mathcal{A}_{ABCD}} = \boxed{\frac{4}{9}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

$\square$

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 2 ore