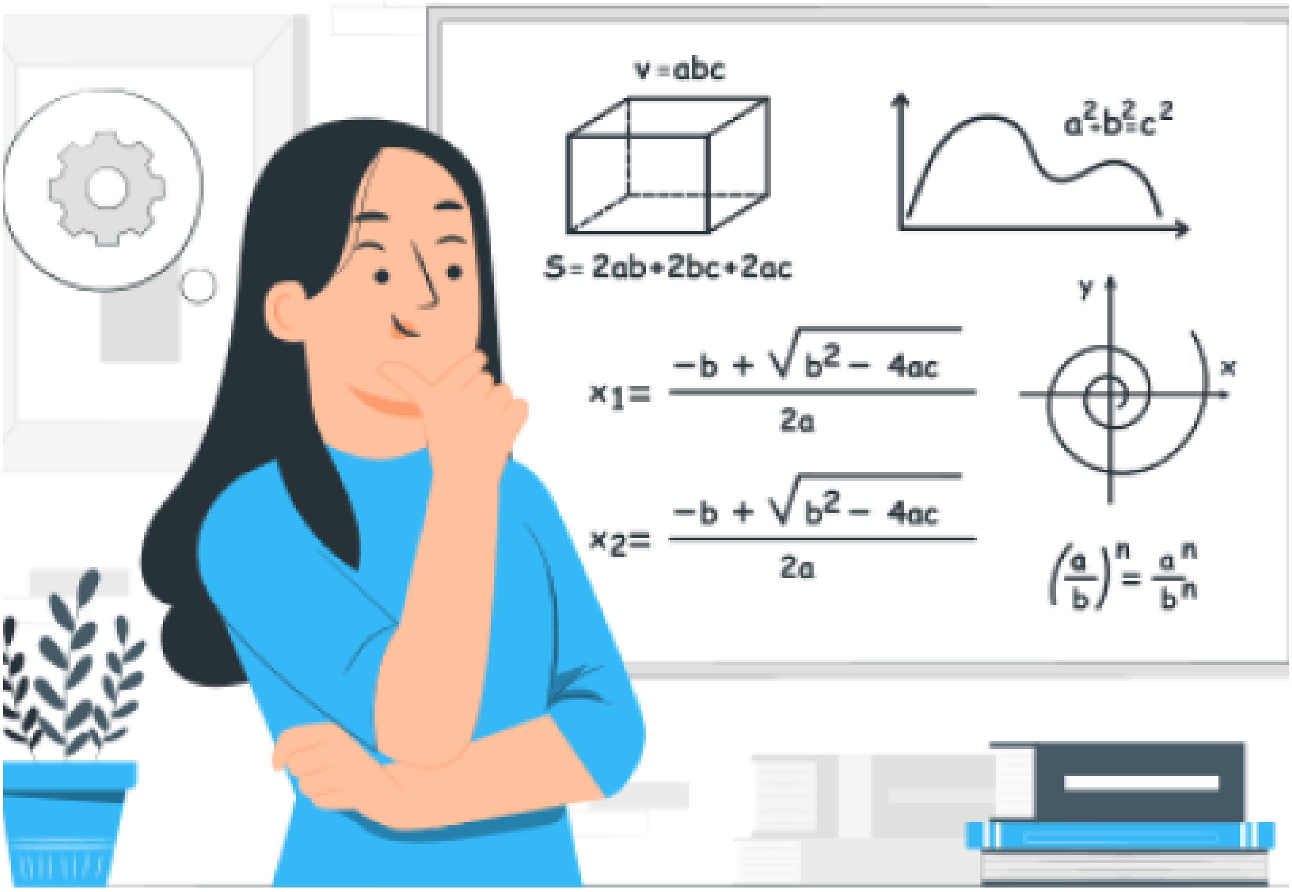

Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022-2023

Etapa II
Clasa a V-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

La ora de educație fizică toți cei 22 de copii din clasă se așează în linie. Sunt 18 fete și 4 băieți. Fiecare băiat numără câte fete are în dreapta lui până la capătul rândului și numerele obținute sunt 3, 6, 12 și 15. Apoi, fiecare fată numără câți băieți are în stânga sa. Care este suma numerelor pe care le-au obținut fetele?

Demonstrație. Distribuția copiilor în linie este: 3 fete, 1 băiat, 3 fete, 1 băiat, 6 fete, 1 băiat, 3 fete, 1 băiat, 3 fete.
Primele 3 fete îi numără pe toți cei 4 băieți, următoarele 3 fete numără doar pe cei 3 băieți din stânga lor, nu și pe cel din dreapta, următoarele 6 fete au fiecare câte 2 băieți în stânga, următoarele 3 au un singur băiat în stânga, iar cele din extremitatea stângă nu au niciun băiat în stânga lor. Astfel, suma numerelor găsite de fete este $3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 12 + 9 + 12 + 3 = \boxed{36}$.

Răspuns corect: $\boxed{36}$ .... $5p$

□

Problema 2

O veveriță are de trei ori mai multe nuci decât alune. În fiecare zi ea mănâncă 6 nuci și 4 alune. După câteva zile veverița rămâne cu 60 de nuci și 4 alune. Câte nuci și alune a avut veverița în total la început?

Demonstrație. Dacă vom nota cu z numărul de zile în care a mâncat câte 6 nuci și 4 alune, atunci, la început, veverița avea $6 \cdot z + 60$ nuci și $4 + 4 \cdot z$ alune. Știm că numărul nucilor era de 3 ori mai mare decât numărul alunelor, adică $60 + 6 \cdot z = 3 \cdot (4 + 4 \cdot z) \iff 60 + 6 \cdot z = 12 + 12 \cdot z \iff 60 - 12 = 12 \cdot z - 6 \cdot z \iff 48 = 6 \cdot z \iff z = 8$. La început veverița a avut $60 + 6 \cdot 8 + 4 + 4 \cdot 8 = \boxed{144}$ nuci și alune.

Răspuns corect: $\boxed{144}$ .... $5p$

□

Problema 3

Fie $S = \overline{ab} + \overline{ac}$, unde $\overline{ab}$ și $\overline{ac}$ sunt numere prime diferite cu proprietatea că $10 \mid \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2$. Determinați cea mai mare valoare a lui S.

Demonstrație. Pentru a obține valoarea maximă a lui S trebuie ca $\overline{ab}$ și $\overline{ac}$ să fie cât mai mari pentru că au aceeași primă cifră. Pentru $a = 9$ există un singur număr prim, 97, ori numerele din problemă sunt diferite. Numerele prime de două cifre care au cifra zecilor egală cu 8 sunt 83 și 89, iar suma pătratelor lor este $83^2 + 89^2 = 6889 + 7921 = 14810$, care este divizibilă cu 10. Cea mai mare valoare a lui S este $\boxed{172}$.

Răspuns corect: $\boxed{172}$ .... $5p$

□

Problema 4

Care este cel mai mic număr natural care are același număr de divizori ca și numărul 2023?

Demonstrație. Descompunerea în factori primi a numărului 2023 este $7 \cdot 17^2$. Divizorii naturali ai lui 2023 sunt 1, 7, 17, $7 \cdot 17$, 17^2 și $7 \cdot 17^2$, deci sunt 6 divizori naturali. Prin verificare directă se obține că cel mai mic număr natural care are 6 divizori naturali este $\boxed{12}$.

Răspuns corect: $\boxed{12}$ 5p

□

Problema 5

Pentru câte valori ale numărului natural nenul $n \geq 2$ numărul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ se poate scrie ca sumă a 2022 numere naturale consecutive?

Demonstrație. Dacă grupăm 2022 de numere naturale consecutive, în ordine, în 1011 perechi, atunci suma fiecărei perechi este număr impar, deci suma celor 2022 de numere este impară. Cum numărul $n!$ este par pentru $n \geqslant 2$, rezultă că nu există numere naturale pentru care să poată fi îndeplinită cerința.

Răspuns corect: $\boxed{0}$ 5p

□

Problema 6

Câte numere de patru cifre au proprietatea că suma primelor două cifre este 9 și suma ultimelor două cifre este 14?

Demonstrație. Vom căuta numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ pentru care $a + b = 9$ și $c + d = 14$. Cum a este prima cifră a unui număr natural obținem că $a \neq 0$, deci $\overline{ab}$ poate fi 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 sau 90, adică 9 variante. Pentru numărul $\overline{cd}$ găsim valorile 59, 68, 77, 86 sau 95, adică 5 variante. Aplicăm principiul produsului. Pentru fiecare valoare pe care o ia numărul $\overline{ab}$, numărul $\overline{cd}$ poate lua oricare din cele 5 valori, așadar numărul numerelor de 4 cifre care îndeplinesc cerințele problemei este $5 \cdot 9 = \boxed{45}$.

Răspuns corect: $\boxed{45}$ 5p

□

Problema 7

Un număr natural n se numește compus dacă poate fi scris ca produsul a două numere naturale mai mari strict decât 1. Se scrie numărul 2023 ca sumă de m numere naturale compuse. Care este cea mai mare valoare pe care o poate lua m?

Demonstrație. Cel mai mic număr compus este 4, așadar vom căuta să îl scriem pe 2023 ca suma a cât mai multe numere egale cu 4. Cum $2023 = 4 \cdot 505 + 3 = 4 \cdot 504 + 7 = 4 \cdot 503 + 11 = 4 \cdot 502 + 15 = 4 \cdot 502 + 6 + 9$. Valoarea maximă a lui m este $\boxed{504}$.

Răspuns corect: $\boxed{504}$ 5p

□

Problema 8

Determinați numărul natural $\overline{baba}$, astfel încât $a + 10 \cdot (a + b)^3 = \overline{baba}$.

Gazeta Matematică nr. 11/2022

Demonstrație. $a+10\cdot(a+b)^3=\overline{baba} \iff 10\cdot(a+b)^3=\overline{baba}-a \iff 10\cdot(a+b)^3=\overline{bab0} \iff (a+b)^3=\overline{bab}$. Observăm de aici că $\overline{bab}$ este un cub perfect de 3 cifre în care prima și a treia cifră sunt egale. Cuburile perfecte de 3 cifre sunt $5^3=125$, $6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=512$ și $9^3=729$. Singurul care verifică condițiile problemei este 343 și $(3+4)^3=343$. Numărul $\overline{baba}$ care este soluție a problemei este $\boxed{3434}$.

Răspuns corect: $\boxed{3434}$ .... $5p$

□

Problema 9

La un concurs de matematică au participat un număr impar de copii. Fiecare a reușit să rezolve câte 11 sau 12 probleme, iar numărul total de probleme rezolvate este 200. Câți dintre copii au rezolvat câte exact 12 probleme?

Demonstrație. Notăm cu x numărul de copii care au rezolvat câte 11 probleme și cu y numărul de copii care au rezolvat câte 12 probleme. Din relația $11\cdot x+12\cdot y=200$ observăm că x este număr par. Cum numărul copiilor care au participat la concurs este impar rezultă că y este număr impar. Din $11\cdot x+12\cdot y=200$ rezultă $y\le 200:12=16$ rest 8, deci $y\le 15$. Rescriem ecuația $11\cdot(x+y)=200-y$, de unde observăm că $200-y\,\vdots\,11$, deci $y=\mathcal{M}_{11}+2$. Singurul număr impar cel mult egal cu 15 care dă restul 2 la împărțirea prin 11 este 13. Obținem $y=13$ și $x=4$. Numărul copiilor care au rezolvat câte 12 probleme este $\boxed{13}$.

Răspuns corect: $\boxed{13}$ .... $5p$

□

Problema 10

La sfârșitul unui concurs de dans fiecare dintre cei trei membri ai juriului acordă fiecăruia dintre cei cinci participanți 0 puncte, 1 punct, 2 puncte, 3 puncte sau 4 puncte. Nu există doi concurenți care să obțină același punctaj de la același membru al juriului. Andrei știe toate punctajele totale și câteva individuale, așa cum se vede în tabelul de mai jos. Câte puncte a primit Andrei de la al treilea membru al juriului?

	Andrei	Bianca	Clara	David	Emil
I	2	0			
II		2	0		
III					
Total	7	5	3	4	11

Demonstrație. Bianca a primi 3 puncte de la al III-lea membru al juriului. Punctajul lui Emil poate fi obținut doar din $3+4+4=11$. Al treilea jurat nu îi poate da 3 puncte lui Emil (i-a dat Biancăi), deci acesta primește de la al treilea jurat 4 puncte. Al III-lea jurat nu ii poate da 0 puncte lui Andrei (punctajul total al acestuia nu se poate obține dacă ar avea 0 puncte), deci îi dă 0 puncte lui David sau Clarei.

- Dacă îi dă Clarei 0 puncte, atunci aceasta are 3 puncte de la juratul I, deci Emil are 4 puncte de la juratul I și David are 1 punct de la același jurat. Singura variantă care mai rămâne pentru David este să primească 1 punct de la al II-lea jurat și 2 puncte de la al III-lea jurat, deci Andrei are 1 punct de la al III-lea jurat.
- Dacă îi dă lui David 0 puncte, atunci singura variantă care mai rămâne pentru Clara este să primească 1 punct de la primul jurat și 2 puncte de la al III-lea jurat. De la al III-lea jurat mai rămâne de acordat 1 punct pentru Andrei.

Așadar, în orice distribuție, Andrei a primit de la al treilea membru al juriului $\boxed{1}$ punct.

Răspuns corect: $\boxed{1}$ 5p

□

Problema 11

Fiecare element din șirul numerelor naturale nenule, mai mici decât 21, se colorează cu câte o culoare, respectând următoarea regulă: dacă un număr are o anumită culoare, atunci orice divizor propriu al său are aceeași culoare. Stabiliți care este numărul maxim de culori care pot fi utilizate.

Demonstrație. Dacă numărul 2 este colorat cu c_1 atunci toate numerele care-l au ca divizor pe 2 vor fi colorate tot cu c_1, adică și 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 și 20. Totodată, toți divizorii proprii ai acestor numere vor fi colorați tot cu c_1, adică 3, 5, 7 și 9. Dacă numărul 5 este colorat cu c_1 atunci și numărul 15 este colorat tot cu c_1, 5 fiind divizor propriu al lui 15. Numărul prim 11 poate fi colorat cu c_2. Numărul prim 13 poate fi colorat cu c_3. Numărul prim 17 poate fi colorat cu c_4. Numărul prim 19 poate fi colorat cu c_5. În plus, numărul 1 poate fi colorat diferit de restul pentru că nu este divizor propriu pentru niciun număr. Așadar, numărul maxim de culori care pot fi utilizate este $\boxed{6}$.

Răspuns corect: $\boxed{6}$ 5p

□

Problema 12

Un număr natural n se numește *superprim* dacă produsul cifrelor sale nenule este un număr prim pe care îl notăm cu p. Determinați numărul *superprim* n pentru care $n + 6 \cdot p = 2023$.

Demonstrație. Dacă n are două cifre, atunci $n + 5 \cdot p < 2023$. Dacă n are 3 cifre, atunci cel mai mare număr cu produsul cifrelor număr prim este 711 și, evident, $711 + 6 \cdot 7 < 2023$.
Pentru numerele de 4 cifre este evident că prima cifră trebuie să fie cel mult 2.
Dacă prima cifra este 1, cum cel mai mare produs al cifrelor unui număr *superprim* este 7, rezultă că $n \geq 2023 - 6 \cdot 7 = 1981$, dar niciunul dintre aceste numere nu are produsul cifrelor număr prim. Așadar, singurul caz este cel în care prima cifră este 2 și singura variantă este $p = 2$. De aici avem $n + 6 \cdot 2 = 2023 \iff n = 2023 - 12 \iff n = \boxed{2011}$.

Răspuns corect: $\boxed{2011}$ 5p

□

Problema 13

O secvență de 5 numere naturale se numește *crescătoare* dacă cele 5 numere sunt ordonate strict crescător și al treilea număr este suma celor două numere din fața lui, al patrulea număr este suma numerelor de pe pozițiile doi și trei, iar al cincilea număr este suma numerelor de pe pozițiile trei și patru. Secvența $11, 20, 31, 51, 82$ este un exemplu de secvență *crescătoare*. Câte astfel de secvențe *crescătoare* îl au pe 124 ca cel mai mare număr din secvență?

Demonstrație. Vom nota primul număr din secvență cu a și al doilea număr cu b. Cum numerele în secvență sunt ordonate strict crescător obținem că $a < b$. O secvență de acest tip este de forma a, b, $a+b$, $a+2\cdot b$, $2\cdot a+3\cdot b$, deci $2\cdot a+3\cdot b = 124$. Din $a < b$ obținem $124 = 2\cdot a+3\cdot b < 5\cdot b \implies b > 24$. Pe de altă parte, b este număr par, deci $b \geq 26$ și $3 \cdot b \leq 124 \implies b \leq 40$. Pentru fiecare valoare pară a lui b de la 26 la 40 obținem soluție naturală pentru a, așadar numărul secvențelor care îl au pe 124 cel mai mare număr este $\boxed{8}$.

Răspuns corect: $\boxed{8}$ .... $5p$

□

Problema 14

Care este ultima cifră a numărului $2023^{2\cdot(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)}+2023$, unde a, b și c sunt numere naturale?

Demonstrație. Numărul $(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)$ este număr par pentru că dintre 3 numere naturale cel puțin două au aceeași paritate. Fără a restrânge generalitatea presupunem că a și b sunt acestea. Atunci $a+b \,\vdots\, 2 \implies (a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a) \,\vdots\, 2$, deci $2\cdot(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a) \,\vdots\, 4$. Atunci $U\left(2023^{2\cdot(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)}+2023\right)=U\left(3^{2\cdot(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)}+2023\right)=U\left(3^4+3\right)=\boxed{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{4}$ .... $5p$

□

Problema 15

Câteva numere naturale distincte sunt scrise pe o tablă. Produsul celor două mai mici numere este 16, iar produsul celor două mai mari numere este 225. Care este suma numerelor scrise pe tablă?

Demonstrație. Scrierile numărului 16 ca produs de două numere sunt $16=1\cdot16=2\cdot8=4\cdot4$, iar pentru 225 avem $225=1\cdot225=3\cdot75=5\cdot45=9\cdot25=15\cdot15$. Cele în care factorii sunt egali se elimină de la început pentru că numerele de pe tablă sunt distincte. Produsul 16 nu se poate obține din 1 și 16 pentru că 16 este mai mare decât unul dintre factorii care apar în fiecare scriere a lui $225: 16>1$, $16>3$, $16>5$, $16>9$, în contradicție cu faptul că sunt cele mai mari numere scrise pe tablă. Singurele variante care au rămas sunt $16=2\cdot8$ și $225=9\cdot25$. Cum 8 și 9 sunt numere consecutive rezultă că nu mai există un alt număr scris pe tablă. Suma numerelor scrise pe tablă este $2+8+9+25=\boxed{44}$.

Răspuns corect: $\boxed{44}$ .... $5p$

□

Problema 16

În pădure sunt 20 de spiriduși. Unii sunt verzi, alții sunt galbeni, iar alții albaștri. Au fost puse 3 întrebări la care fiecare dintre spiriduși a răspuns cu *DA* sau *NU*. Cei verzi spun mereu adevărul, cei albaștri mint mereu și fiecare spiriduș galben a ales între a minți sau a spune adevărul la prima întrebare, iar la următoarele au alternat între a minți și a spune adevărul. De exemplu: dacă un spiriduș galben spune adevărul la prima întrebare, atunci la a doua minte, la a treia spune adevărul.

- Prima întrebare a fost *"Ești verde?"* și 17 dintre ei au răspuns *DA*.
- A doua întrebare a fost *"Ești galben?"* și 12 dintre ei au răspuns *DA*.
- A treia întrebare a fost *"Ești albastru?"* și 8 dintre ei au răspuns *DA*.

Câți spiriduși sunt albaștri?

Demonstrație. Vom nota cu a numărul spiridușilor verzi, cu b numărul spiridușilor galbeni care spun adevărul la prima întrebare, cu c numărul spiridușilor galbeni care mint la prima întrebare și cu d numărul spiridușilor albaștri.

- La prima întrebare au răspuns *DA* spiridușii verzi (ei spun adevărul), cei galbeni care mint și cei albaștri (ei mint mereu). Deci $a + c + d = 17$. Deci sunt $b = 20 - 17 = 3$ spiriduși galbeni care spun adevărul la prima întrebare.

- La a doua întrebare spun *DA* cei c spiriduși care acum spun adevărul și cei d albaștri, deci $c + d = 12$. Din $a + c + d = 17$ obținem că $a = 5$.

- La a treia întrebare vor spune *DA* cei c spiriduși galbeni care mint din nou, adică $c = 8$. Din $c + d = 12 \implies d = 4$.

Numărul spiridușilor albaștri este $\boxed{4}$.
Răspuns corect: $\boxed{4}$ .... $5p$

□

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 3 ore