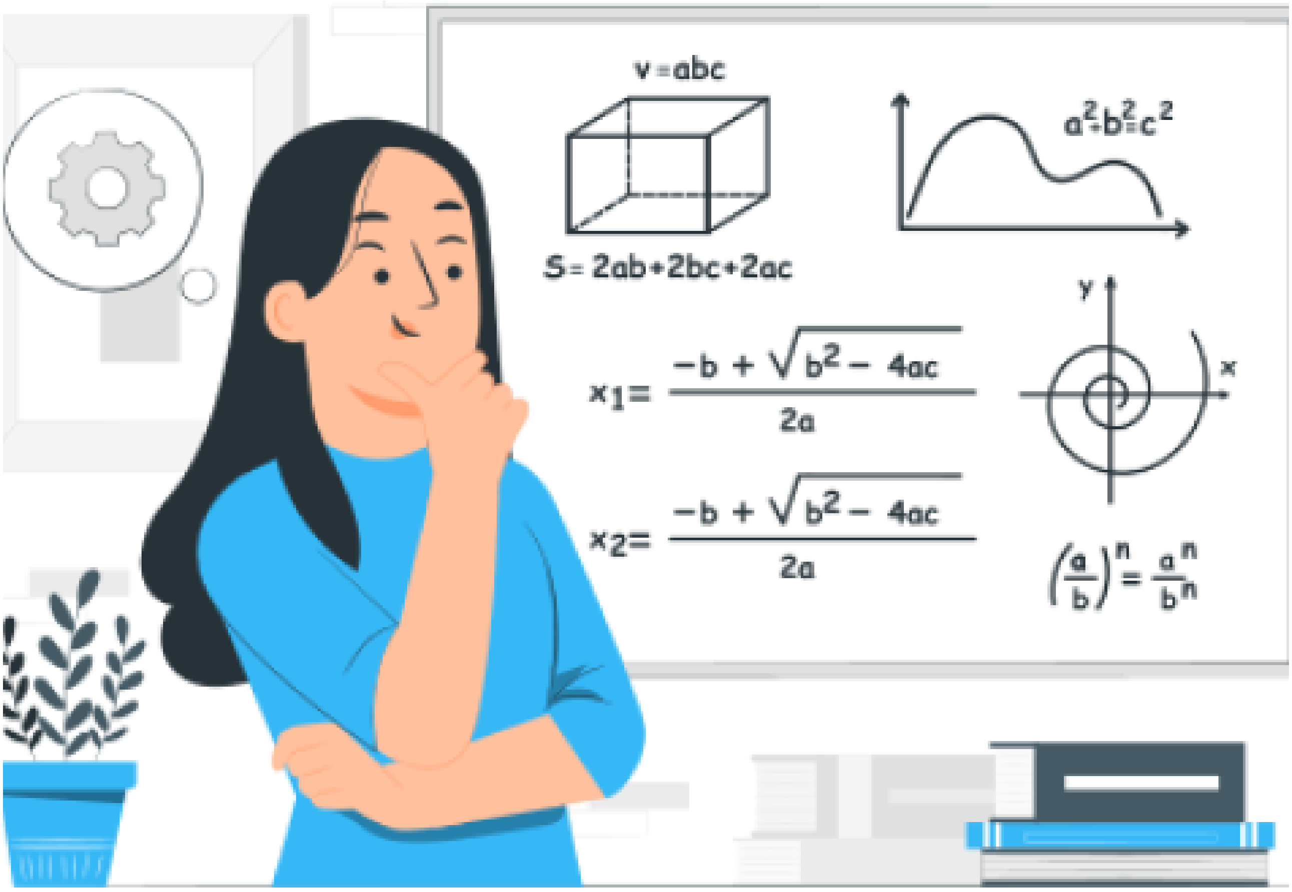


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022-2023

Etapa II
Clasa a VI-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Numerele naturale nenule a și b verifică egalitatea $\frac{a}{b} = \frac{2a + 2022}{2b + 2023}$, iar cel mai mare divizor comun al numerelor a și b este 1. Care este valoarea sumei $a + b$?

Demonstrație. $\frac{a}{b} = \frac{2a + 2022}{2b + 2023} \iff \frac{2a}{2b} = \frac{2a + 2022}{2b + 2023} = \frac{2a + 2022 - 2a}{2b + 2023 - 2b} = \frac{2022}{2023}$ (am aplicat proprietatea fundamentală a șirului de rapoarte egale). În plus $(2022, 2023) = 1$, deci $a = 2022$ și $b = 2023$. Suma celor două numere este $\boxed{4045}$.

Răspuns corect: $\boxed{4045}$ .... $5p$

□

Problema 2

Numerele naturale x, y și z satisfac simultan următoarele condiții:

- x și y sunt numere prime;
- $x^2 + y^2 + z(z + 1)(z + 2) = 522$.

Care este valoarea produsului $x \cdot y \cdot z$?

Demonstrație. Prima observație importantă este că produsul a 3 numere naturale consecutive este divizibil cu 3 pentru că unul dintre ele dă restul 0 la împărțirea prin 3.

Așadar, $z(z + 1)(z + 2) \,\vdots\, 3$, pe de altă parte și $522 \,\vdots\, 3$, deci $x^2 + y^2 \,\vdots\, 3$. Pătratele perfecte dau resturile 0 sau 1 la împărțirea prin 3, deci x^2 și y^2 sunt divizibile cu 3. Însă x și y sunt prime, deci $x = y = 3$. Ecuația devine $z(z+1)(z+2) = 504$, care are soluția $z = 7$. Valoarea produsului $x \cdot y \cdot z$ este $\boxed{63}$.

Răspuns corect: $\boxed{63}$ .... $5p$

□

Problema 3

Numerele naturale x și y sunt soluții ale ecuației

$$12x^2 + 74x + 123 = (2x + 5)(y - 10).$$

Valoarea lui y este egală cu:

Demonstrație.

$$\left.\begin{aligned} 2x + 5 &\mid 12x^2 + 74x + 123 \\ 2x + 5 &\mid 2x + 5 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} 2x + 5 &\mid 12x^2 + 74x + 123 \\ 2x + 5 &\mid 12x^2 + 30x \end{aligned}\right\} \implies 2x + 5 \mid 44x + 123.$$

$$\left.\begin{aligned} 2x + 5 &\mid 44x + 123 \\ 2x + 5 &\mid 44x + 110 \end{aligned}\right\} \implies 2x + 5 \mid 13.$$

Singura valoare naturală a lui x pentru care $2x + 5 \mid 13$ este $x = 4$ pentru care se obține $y = \boxed{57}$.

Răspuns corect: $\boxed{57}$ .... $5p$

$\square$

Problema 4

În interiorul unghiului drept $\angle AOB$ se consideră semidreapta $(OC$, astfel încât $m(\angle AOC) = 55°30'$. Dacă P este un punct în interiorul unghiului $\angle BOC$, câte poziții distincte poate ocupa semidreapta $(OP$ astfel încât $m(\angle AOP) \in \mathbb{N}$? Atenție: punctul P nu se poate afla pe niciuna dintre laturile unghiului $\angle BOC$.

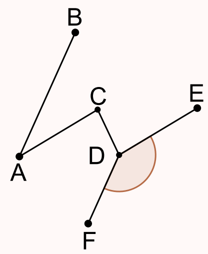
Demonstrație. $m(\angle AOP) = m(\angle AOC) + m(\angle COP) = 55°30' + m(\angle COP) \in \mathbb{N} \iff m(\angle COP) = n°30'$, unde $n \in \mathbb{N}$ și $0 \leq n \leq 33$. Punctul P este în interior, deci $n \neq 34$. Numărul de poziții distincte pe care le poate ocupa semidreapta $(OP$ este $\boxed{34}$.

Răspuns corect: $\boxed{34}$ .... $5p$

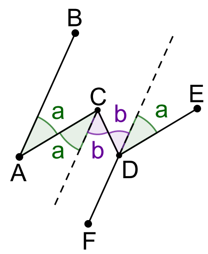
$\square$

Problema 5

În figura următoare știm că $AB \parallel DF$, $AC \parallel DE$ și $m(\angle EDF) = 114°$. Să se determine măsura unghiului $\angle BAC$.



Demonstrație.



Fie $CX \parallel AB$, $(CX \subset Int(\angle ACD)$ și $(DY$ semidreapta opusă semidreptei $(DF$. Vom nota $m(\angle BAC) = a$ și $m(\angle XCD) = b$.

$AB \parallel CX \implies \angle BAC \equiv \angle XCA$ (alterne interne) $\implies m(\angle ACX) = a$.

$CX \parallel DY \implies \angle XCD \equiv \angle YDC$ (alterne interne) $\implies m(\angle CDY) = b$.

Unghiurile $\angle YDE$ si $\angle FDE$ sunt adiacente suplementare, deci $m(\angle YDE) = 180° - m(\angle FDE) = 66°$.

$AC \parallel DE \implies \angle ACD \equiv \angle EDC$ (alterne interne) $\implies m(\angle ACD) = m(\angle EDC) \iff m(\angle ACX) + m(\angle DCX) = m(\angle CDY) + m(\angle EDY) \iff a + b = b + 66° \iff a = 66°$.

Măsura unghiului $\angle BAC$ este egală cu $\boxed{66}$.

Răspuns corect: $\boxed{66}$ .... $5p$

$\square$

Problema 6

Un segment are lungimea 729 cm. Se împarte segmentul în 3 segmente congruente și se șterge segmentul din mijloc. Fiecare segment rămas se împarte în trei segmente congruente și se șterge segmentul din mijloc. Repetăm procedeul până când toate segmentele rămase au fiecare câte 1 cm. Numărul segmentelor rămase este egal cu:

Demonstrație.

Principala observație este că, dacă la un anumit pas sunt k segmente și fiecare este împărțit în 3 segmente, iar unul se șterge, atunci numărul segmentelor se dublează. Plecăm de la un segment de lungime 3^6 și încheiem procedeul când obținem doar segmente de lungime 3^0, deci sunt 6 pași de parcurs obținând pe rând segmente de lungime $3^5, 3^4, 3^3, 3^2, 3, 1$. În final se obțin $2^6 = \boxed{64}$ de segmente.

Răspuns corect: $\boxed{64}$ .... $5p$

$\square$

Problema 7

Numerele prime p și q au proprietatea că $15p + 2q$ și $5p - 2q$ sunt simultan pătrate perfecte. Care este valoarea lui $p \cdot q$?

Demonstrație. Fie $15p + 2q = m^2$, $5p - 2q = n^2$, $m, n \in \mathbb{N}$. Prin adunare obținem $20p = m^2 + n^2$, deci $m^2 + n^2$ este divizibil cu 4. Deoarece restul împărțirii unui pătrat perfect impar la 4 este 1 pentru ca $m^2 + n^2$ să fie divizibil cu 4 trebuie ca m și n să fie pare. Atunci din relația $5p - 2q = n^2$ obținem că p este par, adică $p = 2$. Singura valoare a lui q pentru care $10 - 2q$ este pătrat perfect este 3, care convine. Așadar, $p = 2$ și $q = 3$, iar $p \cdot q = \boxed{6}$.

Răspuns corect: $\boxed{6}$ .... $5p$

$\square$

Problema 8

O maimuță este fericită dacă mănâncă într-o zi exact trei fructe diferite. Care este cel mai mare număr de maimuțe pe care le putem face fericite dacă avem 20 de portocale, 30 de banane, 40 de piersici și 50 de mandarine?

Demonstrație. Numărul de fructe este $20 + 30 + 40 + 50 = 140$ și fiecare maimuță fericită mănâncă 3 fructe. Cum $140 = 3 \cdot 46 + 2$ se pare că cel mai mare număr de maimuțe fericite ar putea fi 46. Chiar dacă am da fiecăreia câte o mandarină (pentru că acestea sunt mai multe) celelalte două fructe trebuiesc alese dintre cele 90 de portocale, banane și piersici. Dar $90 : 2 = 45$, deci numărul maxim este $\boxed{45}$.
Un exemplu este următorul:

Portocale	Banane	Piersici	Mandarine
5	5	0	5
15	0	15	15
0	25	25	25

Răspuns corect: $\boxed{45}$ .... $5p$

$\square$

Problema 9

Pe o tablă sunt scrise numerele 7, 8, ..., 2022, 2023.

- Ana înlocuiește toate cele 2017 numere scrise pe tablă cu suma cifrelor fiecărui număr. De exemplu, numărul 1029 este înlocuit cu $1+0+2+9=12$.
- Bianca înlocuiește fiecare dintre numerele scrise de Ana cu suma cifrelor fiecărui număr.
- Claudiu înlocuiește fiecare număr scris de Bianca cu suma cifrelor numărului.

Care este numărul care apare de cele mai multe ori scris pe tablă atunci când Claudiu termină de făcut înlocuirile?

Demonstrație. Pentru un număr natural n vom nota cu $S(n)$ suma cifrelor sale. Știm că n și $S(n)$ dau același rest la împărțirea prin 9, deci și $S(S(n))$ dă același rest la împărțirea prin 9, etc.
Numerele scrise pe tablă de Ana sunt de la 1 la 28 pentru că numărul care are cea mai mare sumă a cifrelor este 1999, iar resturile pe care le dau acestea la împărțirea cu 9 sunt în ordine

$$7,\ 8,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 0,\ \ldots,\ 5,\ 6,\ 7.$$

Bianca scrie pe tablă sumele cifrelor pentru aceste numere, care sunt de la 1 la 10, iar Claudiu va scrie doar numere de la 1 la 9.
În final, pentru fiecare număr care era scris inițial pe tablă va fi scris acum:

- restul împărțirii numărului la 9 dacă acesta nu este divizibil cu 9;
- numărul 9 pentru numerele divizibile cu 9.

A afla care este numărul cu frecvența cea mai mare revine la a determina care rest apare cel mai des. Cum $2017 = \mathcal{M}_9 + 1$, înseamnă că numerele din extremități apar cel mai des. Se formează grupe complete de câte 9 numere începând de la primul și cel care rămâne izolat este 2023, care dă restul 7 la împărțirea prin 9. Așadar, numărul care apare de cele mai multe ori la final este $\boxed{7}$.

Răspuns corect: $\boxed{7}$ 5p

□

Problema 10

Andrei se pregătește pentru olimpiada de matematică și lucrează în fiecare zi subiectele care au fost date în anii anteriori. Numărul subiectelor lucrate într-o zi este un număr natural. După 5 zile în care a lucrat în fiecare zi, Andrei observă că, dacă împarte numărul de subiecte lucrate în prima zi la $1 \cdot 2$, pe cele lucrate în a doua zi la $2 \cdot 3$, pe cele lucrate în a treia zi la $3 \cdot 4$, pe cele lucrate în a patra zi la $4 \cdot 5$ și pe cele lucrate în a cincea zi la $5 \cdot 6$, suma acestor cinci rapoarte este egală cu 5.
Care este cel mai mic număr de subiecte pe care ar fi putut să le lucreze Andrei în aceste 5 zile?

Demonstrație. Vom nota cu a, b, c, d și e numărul de subiecte lucrate de Andrei în cele 5 zile.

$$\frac{a}{1\cdot 2}+\frac{b}{2\cdot 3}+\frac{c}{3\cdot 4}+\frac{d}{4\cdot 5}+\frac{e}{5\cdot 6}=5 \iff$$

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{6}+\frac{c}{12}+\frac{d}{20}+\frac{e}{30}=5 \iff$$
$$30a+10b+5c+3d+2e=300.$$

Vom aduna la această ecuație pe $20b+25c+27d+28e$ și obținem:

$$30\cdot(a+b+c+d+e)=300+20b+25c+27d+28e.$$

Pentru ca $a+b+c+d+e$ să fie cât mai mic trebuie ca b, c, d, e să fie cât mai mici. Pentru $b=c=d=e=1$ nu avem soluție naturală, dar pentru $b=2$ și $c=d=e=1$ obținem că valoarea minimă a sumei $a+b+c+d+e$ este $\boxed{14}$.

Răspuns corect: $\boxed{14}$ .... $5p$

□

Problema 11

O echipă poate fi aleasă dintre 4 fete și 6 băieți. Singura cerință este ca echipa să conțină cel puțin două fete. În câte moduri poate fi aleasă această echipă?

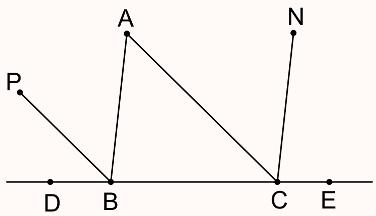
Demonstrație. Ordinea în care sunt aleși copiii nu este importantă, așa încât a afla în câte moduri poate fi aleasă echipa revine, mai întâi, la a afla în câte moduri putem selecta cel puțin două fete dintre cele 4. Cu alte cuvinte, câte submulțimi de două, trei sau patru elemente are o mulțime de cardinal 4. Le putem număra direct sau, mai simplu, din totalul de submulțimi le eliminăm pe cea vidă și pe cele de câte un element și obținem $2^4-1-4=11$. O astfel de submulțime de fete poate fi combinată cu orice submulțime de băieți, chiar și cu mulțimea vidă (o echipă poate fi formată doar din fete), iar numărul de submulțimi ale unei mulțimi de 6 elemente este 2^6. Din principiul produsului rezultă că numărul de moduri în care poate fi aleasă echipa este $11\cdot 64=\boxed{704}$.

Răspuns corect: $\boxed{704}$ .... $5p$

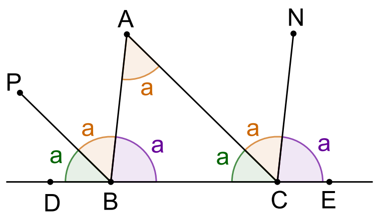
□

Problema 12

Pe o dreaptă se consideră punctele D, B, C, E, în această ordine și fie A un punct care nu aparține dreptei. Dacă $(BP$ și $(CN$ sunt bisectoarele unghiurilor $\angle ABD$, respectiv $\angle ACE$, iar $BP \parallel AC$ și $CN \parallel AB$, determinați măsura unghiului $\angle BAC$.



Demonstrație.



$(BP$ este bisectoarea unghiului $\angle ABD \implies m(\angle DBP) = m(\angle ABP) = a$.
$BP \parallel AC \implies \angle PBA \equiv \angle BAC$ (alterne interne).
$AB \parallel CN \implies \angle BAC \equiv \angle NCA \implies m(\angle NCA) = a$. Cum $(CN$ este bisectoarea unghiului $\angle ACE \implies m(\angle ACN) = m(\angle NCE) = a$.
$AB \parallel CN \implies m(\angle ABC) = m(\angle NCE) = a$ (unghiuri corespondente).
$m(\angle DBC) = m(\angle DBA) + m(\angle ABC) \iff 180° = 3 \cdot a \iff a = 60°$. Măsura unghiului $\angle BAC$ este $\boxed{60}$.

Răspuns corect: $\boxed{60}$ .... $5p$

□

Problema 13

Câte numere naturale n au proprietatea că $n^2 + n$ are exact 6 divizori naturali?

Demonstrație. Doi dintre divizori sunt 1 și $n^2 + n$. Ceilalți 4 sunt divizorii proprii ai numărului $n(n+1)$. Dacă d este un divizor comun al lui n și $n+1$, atunci d divide și diferența lor, care este 1, așadar numerele sunt prime între ele. Mai mult de atât, unul dintre numerele n sau $n+1$ este prim, altfel, fiecare ar avea cel puțin doi factori primi distincți în descompunere și numărul minim de divizori ai numărului ar fi cel puțin 16.

- Dacă n este prim, atunci $n + 1 = q^2$, unde și q este număr prim. Observăm de aici că numerele n și q au parități diferite și avem de analizat cazurile $n = 2$ sau $q = 2$. Avem soluție în cazul $q = 2$ și valoarea lui $n = 3$.
- Dacă $n + 1$ este prim, atunci $n = q^2$, q este număr prim. Deci $q^2 + 1$ este prim, ori asta se întâmplă doar pentru $q = 2$ și $n = 4$.

Numărul valorilor naturale ale lui n pentru care $n^2 + n$ are exact 6 divizori naturali este $\boxed{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{2}$ .... $5p$

□

Problema 14

Fie dreapta AB și $O \in (AB)$. De aceeași parte a dreptei AB se consideră în același sens unghiurile adiacente $\angle AOA_1, \angle A_1OA_2, \angle A_2OA_3, \ldots, \angle A_{17}OA_{18}$, astfel încât $m(\angle AOA_1) = 1°$, $m(\angle A_1OA_2) = 2°$, $m(\angle A_2OA_3) = 3°, \ldots, m(\angle A_{17}OA_{18}) = 18°$. Determinați numărul de unghiuri drepte $\angle A_iOA_j$, unde $i, j \in \{1, 2, \ldots, 18\}$.

Demonstrație. $m(\angle A_iOA_j) = m(\angle A_iOA_{i+1}) + m(\angle A_{i+1}OA_{i+2}) + \ldots + m(\angle A_{j-1}OA_j) =$
$(i+1) + (i+2) + \ldots + j = \dfrac{(j+i+1)(j-i)}{2} = 90° \iff (j-i)(j+i+1) = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$.
Deci $j - i \in D_{180}$ și $j - i < j + i + 1$. Deducem $j - i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12\}$.
Cazurile $\begin{cases} j - i = 1 \\ j + i + 1 = 180 \end{cases} \ldots \begin{cases} j - i = 5 \\ j + i + 1 = 36 \end{cases}$ dau $j > 18$. Deoarece $j - i$ și $j + i + 1$ au parități diferite rămân cazurile $\begin{cases} j - i = 9 \\ j + i + 1 = 20 \end{cases}, \begin{cases} j - i = 12 \\ j + i + 1 = 15 \end{cases}$ cu soluțiile $j = 14, i = 5$ respectiv $j = 13, i = 1$. Numărul de unghiuri drepte este $\boxed{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{2}$ .... $5p$

□

Problema 15

În interiorul unghiului drept $\angle A_1OA_{14}$ se construiesc 12 semidrepte distincte cu originea în O, notate $(OA_i$ cu $i \in \{2, 3, \ldots 13\}$, astfel încât cele 13 unghiuri adiacente formate $\angle A_iOA_{i+1}$ au măsurile numere naturale. Știind că printre acestea există 3 unghiuri congruente de măsură $a°$, iar măsurile celorlalte unghiuri sunt diferite două câte două oricum le-am alege, aflați valoarea maximă a lui a.

Demonstrație. Nu este important care dintre unghiuri sunt congruente pentru că singura condiție care există este că suma măsurilor lor este de 90°, iar adunarea este operație comutativă. Vom alege că cele trei unghiuri congruente sunt $\angle A_1OA_2$, $\angle A_2OA_3$ și $\angle A_3OA_4$. Pentru ca măsurile acestora să fie cât mai mari trebuie ca suma celorlalte 10 unghiuri să fie cât mai mică. Cum $m(\angle A_4OA_5) + m(\angle A_5OA_6) + \ldots + m(\angle A_{13}OA_{14}) \geq 1° + 2° + \ldots + 10° = 55° \implies$ suma măsurilor unghiurilor congruente este cel mult $90° - 55° = 35° \implies 3 \cdot a \leq 35$, $a \in \mathbb{N} \implies$ valoarea maximă a lui a este $\boxed{11}$. În acest caz restul unghiurilor pot avea măsurile $1°, 2°, \ldots 9°$ și $12°$.

Răspuns corect: $\boxed{11}$ 5p

□

Problema 16

Un număr natural nenul se numește *bun* dacă are cifra unităților 0 sau 1, cifra zecilor este 0, 1 sau 2, cifra sutelor este 0, 1, 2 sau 3 și asa mai departe. Astfel, primele zece numere naturale *bune* în ordine crescătoare sunt 1, 10, 11, 20, 21, 100, 101, 110, 111 și 120. Care este al 100−lea număr natural *bun* în ordine crescătoare?

Demonstrație.

- Există un singur număr *bun* de o cifră.
- Numerele *bune* de două cifre sunt 10, 11, 20 și 21, adică patru în total.
- Primele 6 numere *bune* de câte 3 cifre sunt 100, 101, 110, 111, 120, 121. Următoarele 12 numere bune de câte 3 cifre se obțin înlocuind cifra sutelor mai întâi cu 2 și apoi cu 3.

Am numărat până acum 23 numere *bune*. Din aceste numere plus numărul 1000 se obțin 24 numere *bune* de câte 4 cifre care au cifra miilor egală cu 1, alte 24 de numere *bune* care au cifra miilor egală cu 2 și încă un set de 24 numere *bune* care au cifra miilor egală cu 3. Am numărat, astfel, 95 numere bune. Al cincilea număr din setul celor de câte 4 cifre care au cifra miilor egală cu 4 este numărul căutat. Al 100−lea număr *bun* este $\boxed{4020}$.

Răspuns corect: $\boxed{4020}$ 5p

□

Problemele 1-16: . . . . $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: 20p
Total: 100p

Timp de lucru: . . . . 3 ore