

**Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022-2023**

**Etapa II
Clasa a VI-a**

**- Subiecte -
Lioara Ivanovici**

§1 Subiecte

Problema 1

Numerele naturale nenule a și b verifică egalitatea $\frac{a}{b} = \frac{2a + 2022}{2b + 2023}$, iar cel mai mare divizor comun al numerelor a și b este 1. Care este valoarea sumei $a + b$?

Problema 2

Numerele naturale x , y și z satisfac simultan următoarele condiții:

- x și y sunt numere prime;
- $x^2 + y^2 + z(z + 1)(z + 2) = 522$.

Care este valoarea produsului $x \cdot y \cdot z$?

Problema 3

Numerele naturale x și y sunt soluții ale ecuației

$$12x^2 + 74x + 123 = (2x + 5)(y - 10).$$

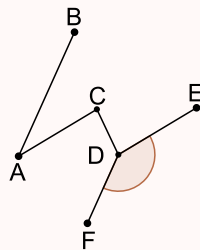
Valoarea lui y este egală cu:

Problema 4

În interiorul unghiului drept $\angle AOB$ se consideră semidreapta $(OC$, astfel încât $m(\angle AOC) = 55^\circ 30'$. Dacă P este un punct în interiorul unghiului $\angle BOC$, câte poziții distincte poate ocupa semidreapta $(OP$ astfel încât $m(\angle AOP) \in \mathbb{N}$? Atenție: punctul P nu se poate afla pe niciuna dintre laturile unghiului $\angle BOC$.

Problema 5

În figura următoare știm că $AB \parallel DF$, $AC \parallel DE$ și $m(\angle EDF) = 114^\circ$. Să se determine măsura unghiului $\angle BAC$.



Problema 6

Un segment are lungimea 729 cm. Se împarte segmentul în 3 segmente congruente și se șterge segmentul din mijloc. Fiecare segment rămas se împarte în trei segmente congruente și se șterge segmentul din mijloc. Repetăm procedeul până când toate segmentele rămase au fiecare câte 1 cm. Numărul segmentelor rămase este egal cu:

Problema 7

Numerele prime p și q au proprietatea că $15p + 2q$ și $5p - 2q$ sunt simultan pătrate perfecte. Care este valoarea lui $p \cdot q$?

Problema 8

O maimuță este fericită dacă mănâncă într-o zi exact trei fructe diferite. Care este cel mai mare număr de maimuțe pe care le putem face fericite dacă avem 20 de portocale, 30 de banane, 40 de piersici și 50 de mandarine?

Problema 9

Pe o tablă sunt scrise numerele 7, 8, ..., 2022, 2023.

- Ana înlocuiește toate cele 2017 numere scrise pe tablă cu suma cifrelor fiecărui număr. De exemplu, numărul 1029 este înlocuit cu $1 + 0 + 2 + 9 = 12$.
- Bianca înlocuiește fiecare dintre numerele scrise de Ana cu suma cifrelor fiecărui număr.
- Claudiu înlocuiește fiecare număr scris de Bianca cu suma cifrelor numărului.

Care este numărul care apare de cele mai multe ori scris pe tablă atunci când Claudiu termină de făcut înlocuirile?

Problema 10

Andrei se pregătește pentru olimpiada de matematică și lucrează în fiecare zi subiectele care au fost date în anii anteriori. Numărul subiectelor lucrate într-o zi este un număr natural. După 5 zile în care a lucrat în fiecare zi, Andrei observă că, dacă împarte numărul de subiecte lucrate în prima zi la $1 \cdot 2$, pe cele lucrate în a doua zi la $2 \cdot 3$, pe cele lucrate în a treia zi la $3 \cdot 4$, pe cele lucrate în a patra zi la $4 \cdot 5$ și pe cele lucrate în a cincea zi la $5 \cdot 6$, suma acestor cinci rapoarte este egală cu 5.

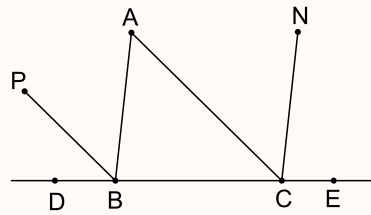
Care este cel mai mic număr de subiecte pe care ar fi putut să le lucreze Andrei în aceste 5 zile?

Problema 11

O echipă poate fi aleasă dintre 4 fete și 6 băieți. Singura cerință este ca echipa să conțină cel puțin două fete. În câte moduri poate fi aleasă această echipă?

Problema 12

Pe o dreaptă se consideră punctele D, B, C, E , în această ordine și fie A un punct care nu aparține dreptei. Dacă (BP) și (CN) sunt bisectoarele unghiurilor $\angle ABD$, respectiv $\angle ACE$, iar $BP \parallel AC$ și $CN \parallel AB$, determinați măsura unghiului $\angle BAC$.



Problema 13

Câte numere naturale n au proprietatea că $n^2 + n$ are exact 6 divizori naturali?

Problema 14

Fie dreapta AB și $O \in (AB)$. De aceeași parte a dreptei AB se consideră în același sens unghiurile adiacente $\angle AOA_1, \angle A_1OA_2, \angle A_2OA_3, \dots, \angle A_{17}OA_{18}$, astfel încât $m(\angle AOA_1) = 1^\circ, m(\angle A_1OA_2) = 2^\circ, m(\angle A_2OA_3) = 3^\circ, \dots, m(\angle A_{17}OA_{18}) = 18^\circ$. Determinați numărul de unghiuri drepte $\angle A_iOA_j$, unde $i, j \in \{1, 2, \dots, 18\}$.

Problema 15

În interiorul unghiului drept $\angle A_1OA_{14}$ se construiesc 12 semidrepte distincte cu originea în O , notate (OA_i) cu $i \in \{2, 3, \dots, 13\}$, astfel încât cele 13 unghiuri adiacente formate $\angle A_iOA_{i+1}$ au măsurile numere naturale. Știind că printre acestea există 3 unghiuri congruente de măsură a° , iar măsurile celorlalte unghiuri sunt diferite două câte două oricum le-am alege, aflați valoarea maximă a lui a .

Problema 16

Un număr natural nenul se numește *bun* dacă are cifra unităților 0 sau 1, cifra zecilor este 0, 1 sau 2, cifra sutelor este 0, 1, 2 sau 3 și așa mai departe. Astfel, primele zece numere naturale *bune* în ordine crescătoare sunt 1, 10, 11, 20, 21, 100, 101, 110, 111 și 120. Care este al 100-lea număr natural *bun* în ordine crescătoare?

Problemele 1-16:	$16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu:	$20p$
Total:	$100p$
Timp de lucru:	3 ore