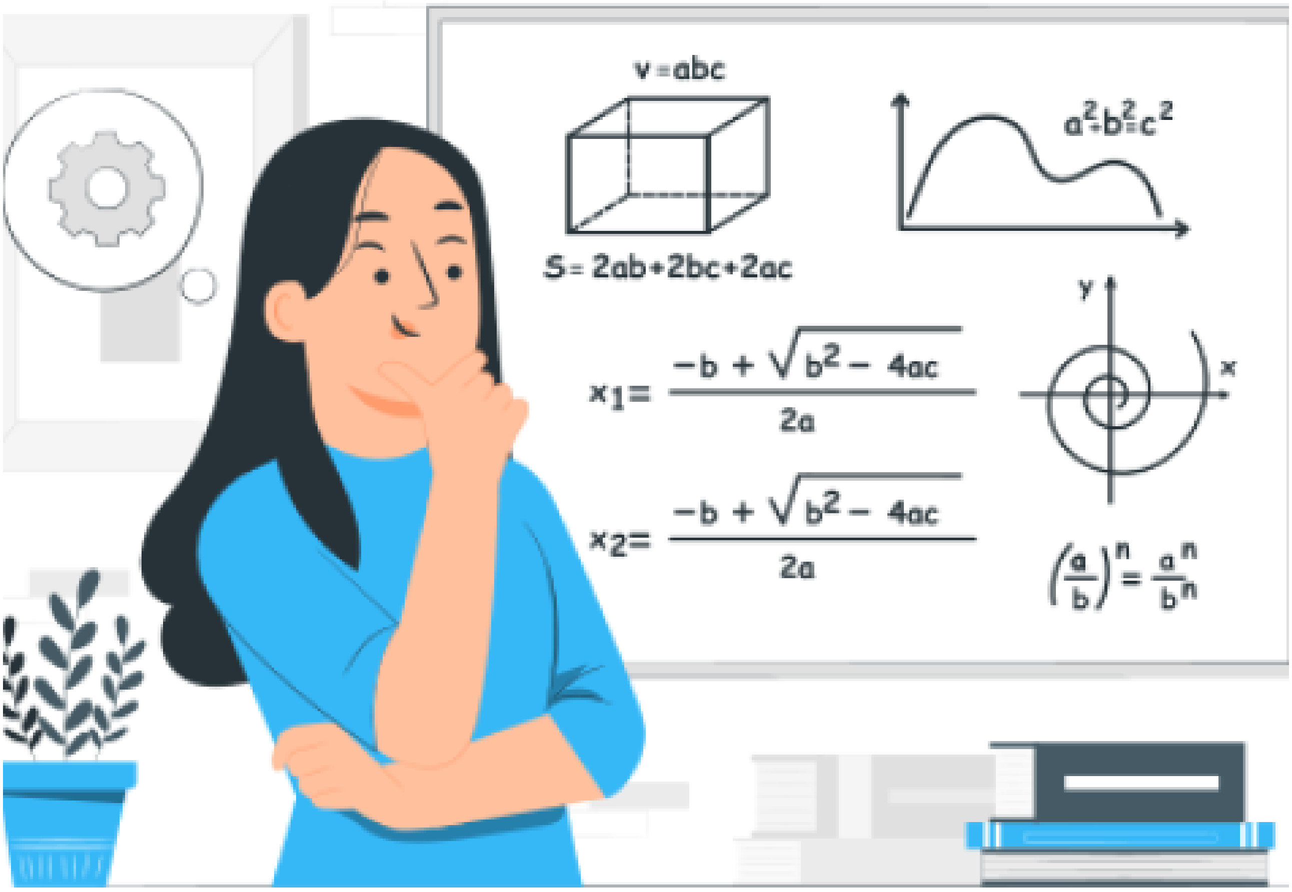


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022-2023

Etapa II
Clasa a VII-a

- Soluții -

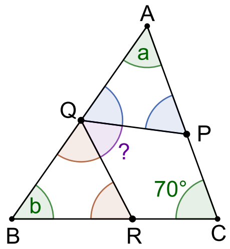
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

În triunghiul $\triangle ABC$ se consideră punctele $P \in (AC)$, $Q \in (AB)$ și $R \in (BC)$, astfel încât $AP = AQ$ și $BR = BQ$. Știind că $m(\angle ACB) = 70°$, să se determine măsura unghiului $\angle PQR$.

Demonstrație.



Vom nota $m(\angle BAC) = a$ și $m(\angle ABC) = b$. În $\triangle ABC$ are loc $m(\angle BAC)+ m(\angle ABC)+ m(\angle ACB) = 180° \implies a + b = 110°$.
$AP = AQ \implies \triangle APQ$ este isoscel și $m(\angle APQ) = m(\angle AQP) = 90° - \frac{a}{2}$. Unghiurile $\angle APQ$ și $\angle CPQ$ sunt suplementare, deci $m(\angle CPQ) = 90° + \frac{a}{2}$.
Analog, în $\triangle BPQ \implies m(\angle BRQ) = m(\angle BQR) = 90° - \frac{b}{2}$. Unghiurile $\angle BRQ$ și $\angle CRQ$ sunt suplementare, deci $m(\angle CRQ) = 90° + \frac{b}{2}$.
Suma măsurilor unghiurilor patrulaterului $CPQR$ este 360°, deci $m(\angle PQR) = 360° - m(\angle CPQ) - m(\angle PCR) - m(\angle CRQ) = 360° - 90° - \frac{a}{2} - 70° - 90° - \frac{b}{2} = \boxed{55°}$.

Răspuns corect: $\boxed{55}$ . . . . $5p$

□

Problema 2

Un număr natural de şase cifre de forma $\overline{ababab}$ se numește „prieten cu şase" dacă și numai dacă $\frac{a \cdot b \cdot (a-b) \cdot (a+b)}{6} \in \mathbb{N}$. Câte numere naturale de şase cifre sunt „prietene cu şase"?

Demonstrație. Considerăm $\overline{ababab}$ un număr natural „prieten cu şase”. Este evident că $a \geq b$. Dacă a sau b sunt pare, atunci $2 \mid a \cdot b$, iar dacă a și b sunt impare, atunci $a - b$ și $a + b$ sunt pare și, prin urmare, $2 \mid (a - b) \cdot (a + b)$. Deci, 2 divide produsul $a \cdot b \cdot (a - b) \cdot (a + b)$ pentru orice două numere naturale a și b.

Dacă a sau b sunt divizibile cu 3, atunci 3 divide produsul $a \cdot b \cdot (a - b) \cdot (a + b)$. Dacă a și b nu se divid cu 3, atunci a și b sunt de forma $3 \cdot k + 1$ sau $3 \cdot k + 2$. Dacă a și b sunt de aceeași formă, atunci 3 divide $a - b$, iar dacă a și b sunt de forme diferite, atunci 3 divide $a + b$. Prin urmare, 3 divide produsul $a \cdot b \cdot (a - b) \cdot (a + b)$ pentru orice două numere naturale a și b. Cum 2 și 3 sunt prime între ele deducem că 6 divide $a \cdot b \cdot (a - b) \cdot (a + b)$. Deci, singura condiție care trebuie impusă cifrelor a și b este $a \geq b$. Prin urmare, avem în total $2 + 3 + 4 + \ldots + 10 = \boxed{54}$ numere ,prietene cu şase”.

Răspuns corect: $\boxed{54}$ . . . . $5p$

□

Problema 3

Cea mai mare valoare a numărului natural $\overline{abcd}$ pentru care are loc relația $\left(\overline{abc}\right)^2 = \left(\overline{dc}\right)^3$ este egală cu:

Demonstrație. Din relația $\left(\overline{abc}\right)^2 = \left(\overline{dc}\right)^3$ deducem că $\overline{abc}$ este un cub perfect de 3 cifre. În plus, ultima cifră a lui c^2 trebuie să fie aceeași cu ultima cifră a lui c^3, adică c poate fi 0, 1, 5 sau 6.
Cuburile perfecte de 3 cifre sunt $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$ și $9^3 = 729$. Cele care respectă condiția pentru ultima cifră sunt 125 și 216. În primul caz $125^2 = 25^3$ și în al doilea $216^2 = 36^3$. Cea mai mare valoare a numărului $\overline{abcd}$ este $\boxed{2163}$.

Răspuns corect: $\boxed{2163}$ .... $5p$

□

Problema 4

Fie x, y, z numere reale astfel încât au loc, simultan, relațiile $3x-5y+7 \geq 0$, $5y-7z+9 \geq 0$ și $7z - 3x - 16 \geq 0$. Determinați valoarea expresiei $3x - 25y + 28z$.

Demonstrație. Observăm că $(3x - 5y + 7) + (5y - 7z + 9) + (7z - 3x - 16) = 0$ și având în vedere condițiile din enunț deducem că $3x - 5y + 7 = 0, 5y - 7z + 9 = 0$ și $7z - 3x - 16 = 0$, de unde $3x - 5y = -7$ și $5y - 7z = -9$. De aici $(3x - 5y) - 4(5y - 7z) = = -7 - 4 \cdot (-9)$, adică $3x - 25y + 28z = \boxed{29}$.

Răspuns corect: $\boxed{29}$ .... $5p$

□

Problema 5

Numerele întregi a, b și c verifică relația $a + b + c = (a - b) \cdot (b - c) \cdot (c - a)$. Care este restul împărțirii lui $a + b + c$ la 27?

Demonstrație. Este natural să studiem mai întâi resturile la împărțirea cu 3.
Dacă $(a - b) \cdot (b - c) \cdot (c - a)$ nu se divide cu 3, atunci toate diferențele sunt nedivizibile cu 3, deci oricare două numere dau resturi diferite la împărțirea cu 3. Însă atunci suma $a + b + c$ este divizibilă cu 3 pentru că $\mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_3 + 1 + \mathcal{M}_3 + 2 = \mathcal{M}_3$ și obținem o contradicție. Prin urmare, cel puțin una dintre diferențe este divizibilă cu 3. Fără a particulariza în vreun fel problema vom alege că a și b dau același rest la împărțirea prin 3 $\implies 3 \mid a - b \implies 3 \mid a + b + c$. De aici obținem că și c dă același rest ca și a la împărțirea cu 3, adică fiecare dintre diferențele $a - b$, $b - c$, $c - a$ este divizibilă cu 3, prin urmare produsul lor este divizibil cu 27. Restul împărțirii lui $a + b + c$ la 27 este $\boxed{0}$.

Răspuns corect: $\boxed{0}$ .... $5p$

□

Problema 6

Numerele naturale nenule a, b, c sunt direct proporționale cu 5, 4, respectiv 3 și mulțimea $A = \left\{ \frac{a^n}{b^n + c^n} | n \in \{0, 1, 2, 3, ..., 2023\} \right\}$. Probabilitatea ca alegând la întâmplare un element din mulțimea A, acesta să reprezinte o fracție supraunitară este $\frac{m}{n}$, unde m, $n \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$. Care este valoarea sumei $m + n$?

Demonstrație. Numerele a, b, c sunt direct proporționale cu 5, 4, 3, deci $a = 5k$, $b = 4k$ și $c = 3k$. Un element al mulțimii A este de forma $\dfrac{a^n}{b^n + c^n} = \dfrac{5^n \cdot k^n}{4^n \cdot k^n + 3^n \cdot k^n} = \dfrac{5^n}{4^n + 3^n}$. Căutăm valorile lui n pentru care $\dfrac{5^n}{3^n + 4^n} > 1 \iff 3^n + 4^n < 5^n$. Împărțim inegalitatea prin 5^n și devine $\left(\dfrac{3}{5}\right)^n + \left(\dfrac{4}{5}\right)^n < 1$.
Am recomanda aici să se testeze primele câteva valori ale lui n pentru că $a^{n+1} < a^n$ pentru a număr pozitiv subunitar și odată găsită cea mai mică valoare a lui n pentru care suma este mai mică decât 1, are loc aceeași proprietate pentru toate numerele mai mari.
Altfel, $\left(\dfrac{3}{5}\right)^n + \left(\dfrac{4}{5}\right)^n < \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{9+16}{25} = 1$, pentru orice număr natural $n > 2$. Așadar, fracțiile supraunitare sunt cele în care $n \geq 3$, adică în mulțimea A sunt 2021 fracții supraunitare. Mai mult, toate cele 2024 de fracții sunt diferite pentru că acestea formează un șir crescător. Într-adevăr, $\dfrac{5^{n+1}}{3^{n+1} + 4^{n+1}} > \dfrac{5^n}{3^n + 4^n} \iff \dfrac{3^{n+1} + 4^{n+1}}{5^{n+1}} < \dfrac{3^n + 4^n}{5^n} \iff \left(\dfrac{3}{5}\right)^{n+1} + \left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1} < \left(\dfrac{3}{5}\right)^n + \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$, inegalitate adevărată. Prin urmare, cardinalul mulțimii A este 2024.
Probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulțimea A, acesta să fie supraunitar este $\dfrac{2021}{2024}$, fracție care este ireductibilă. Suma dintre numărător și numitor este $\boxed{4045}$.

Răspuns corect: $\boxed{4045}$ .... $5p$

□

Problema 7

Se consideră numerele reale distincte și nenule x, y, și z astfel încât

$$xy + \frac{1}{yz} = yz + \frac{1}{zx} = zx + \frac{1}{xy}.$$

Să se determine valoarea pentru $|xyz|$, unde am notat cu $|a|$ modulul (sau valoarea absolută) a numărului a.

Demonstrație. $xy + \dfrac{1}{yz} = yz + \dfrac{1}{zx} \iff xy - yz = \dfrac{1}{zx} - \dfrac{1}{yz} \iff y(x - z) = \dfrac{y - x}{xyz} \iff xy^2z(x - z) = y - x$.
Prelucrăm similar și celelalte două egalități și obținem

$$xy^2z(x - z) = y - x$$

$$xyz^2(y - x) = z - y$$

$$x^2yz(z - y) = x - z.$$

Înmulțim aceste trei relații și obținem

$$x^4y^4z^4(x - z)(y - x)(z - y) = (x - z)(y - x)(z - y).$$

Cum cele trei numere sunt distincte rezultă că diferența oricăror două este nenulă și $x^4y^4z^4 = 1$, adică valoarea absolută a produsului celor trei numere este $\boxed{1}$.

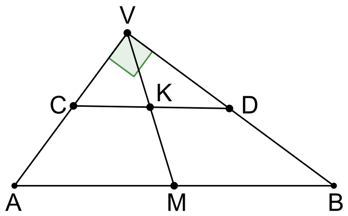
Răspuns corect: $\boxed{1}$ .... $5p$

□

Problema 8

Unghiurile A și B de la baza trapezului $ABCD$ sunt complementare. Știind că baza mare are lungimea de 20 cm, baza mică are lungimea de 14 cm și M este mijlocul lui (AB), K este mijlocul lui (CD), să se calculeze MK.

Demonstrație.



$m(\angle A)+ m(\angle B) = 90° \implies m(\angle A) < 90°$ și $m(\angle B) < 90°$, deci baza mare este (AB) și baza mică (CD).
Fie $AD \cap BC = \{V\}$. Triunghiul $\triangle VAB$ este dreptunghic în V pentru că $m(\angle V) = 180° - m(\angle A) - m(\angle B) = 180° - 90° = 90°$.
Într-un trapez mijloacele bazelor și punctul de intersecție al laturilor neparalele sunt coliniare, deci V, K și M sunt coliniare, iar (VK) și (VM) sunt medianele corespunzătoare ipotenuzelor în triunghiurile dreptunghice $\triangle VCD$ și $\triangle VAB$. Din teorema medianei în triunghiul dreptunghic rezultă $VK = \dfrac{DC}{2}$ și $VM = \dfrac{AB}{2} \implies KM = VM - VK = \dfrac{AB}{2} - \dfrac{CD}{2} = \boxed{3}$ cm.

Răspuns corect: $\boxed{3}$ 5*p*

□

Problema 9

Dintr-o urnă cu n bile $(n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3)$, numerotate de la 1 la n, se extrage o bilă. Știind că media aritmetică a numerelor scrise pe bilele rămase în urnă este $51,30$, să se determine numărul scris pe bila extrasă.

Demonstrație. Fie $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, numărul scris pe bila extrasă. Avem că $\dfrac{1+2+\ldots+n-k}{n-1} = 51,3 \iff \dfrac{\frac{n(n-1)}{2}+n-k}{n-1} = \dfrac{513}{10} \iff \dfrac{n}{2} + \dfrac{n-k}{n-1} = \dfrac{513}{10} \iff \dfrac{n-k}{n-1} = \dfrac{513-5n}{10}$, relație pe care o notăm cu (1). Deoarece $n-k \geq 0$ este necesar ca $513 - 5 \cdot n \geq 0$, de unde rezultă $n \leq \dfrac{513}{5}$, adică $n \leq 102$. Proporția din relația (1) este echivalentă cu $\dfrac{1-k}{n-1} = \dfrac{503-5n}{10}$. Deoarece $1-k \leq 0$, rezultă că $503 - 5n \leq 0 \implies n \geq \dfrac{503}{5} \implies n \geq 101$. Prin urmare, $n \in \{101; 102\}$.

- Pentru $n = 101$, avem: $\dfrac{101-k}{100} = \dfrac{513-505}{10} \iff \dfrac{101-k}{100} = \dfrac{8}{10} \iff k = 101 - 80 = 21$.
- Pentru $n = 102$, avem: $\dfrac{102-k}{101} = \dfrac{513-510}{10} \iff \dfrac{102-k}{101} = \dfrac{3}{10}$ (imposibil).

Numărul scris pe bila extrasă este $\boxed{21}$.

Răspuns corect: $\boxed{21}$ 5*p*

□

Problema 10

Câte numere naturale de 5 cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, astfel încât oricum am selecta trei cifre vecine acestea să nu fie scrise în ordine crescătoare sau în ordine descrescătoare?
De exemplu, numărul 13245 nu verifică condițiile pentru că secvența de trei cifre consecutive 245 este crescătoare, pe când numărul 15342 verifică condițiile.

Demonstrație. Problema revine la a determina secvențele de tipul $a < b > c < d > e$ sau $a > b < c > d < e$. Cele două cazuri sunt similare. În primul caz se observă că b sau d trebuie să fie 5. Fără a restrânge generalitatea vom alege că $d = 5$.

- Dacă $b = 3$, atunci $\{a, c\} = \{1, 2\}$ și $e = 4$, deci sunt două variante.
- Dacă $b = 4$, atunci cele trei numere pot lua oricare dintre valorile 1, 2, 3 în 6 variante de ordonare.

Așadar, pentru $d = 5$ sunt 8 numere. La fel, pentru $b = 5$ găsim alte 8 numere, deci 16 pentru aceasta ordonare. Al doilea caz este identic pentru că b sau d trebuie să fie 1 și cazurile se analizează la fel. Găsim, astfel, că numerele de 5 cifre care verifică condițiile problemei sunt în număr de $\boxed{32}$.

Răspuns corect: $\boxed{32}$ .... $5p$

□

Problema 11

Scriem pe o tablă 2023 de numere raționale:
$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, -\frac{1}{1011}, 0, \frac{1}{1011}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$. Se aleg două dintre numerele de pe tablă, x și y, se șterg, iar în locul lor se pune rezultatul calculului $x - 43xy + y$. După mai multe astfel de operații pe tablă rămâne un singur număr pe care îl notăm $\frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $(a, b) = 1$. Care este valoarea sumei $a + b$?

Demonstrație. Printre numerele de pe tablă există și $\frac{1}{43}$. În momentul în care va fi selectat $\frac{1}{43}$ și oricare alt număr y, în locul lor va fi scris numărul $\frac{1}{43} - 43 \cdot \frac{1}{43}y + y = \frac{1}{43} - y + y = \frac{1}{43}$. Deci, ultimul număr care va fi scris pe tablă este $\frac{1}{43}$, adică $a = 1$ și $b = 43$, de unde $a + b = \boxed{44}$.

Răspuns corect: $\boxed{44}$ .... $5p$

□

Problema 12

Pentru fiecare submulțime $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ cu $a_1 < a_2 < \ldots < a_{k-1} < a_k$ a mulțimii $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ notăm cu S_A numărul $S_A = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{k-1} \cdot a_k$. Să se afle care este suma tuturor numerelor S_A atunci când A parcurge mulțimea tuturor submulțimilor mulțimii X.

Demonstrație. Vom pune cele $2^{11} = 2048$ submulțimi în perechi astfel: fiecare submulțime $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, unde $1 < a_1 < \ldots < a_k$ o punem în pereche cu $B = \{1, a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Astfel, $S_A = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{k-1} \cdot a_k$ și $S_B = 1 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^k \cdot a_k$. Suma acestor două numere este 1. Evident, mulțimea vidă este în pereche cu submulțimea $\{1\}$. Sunt $2^{10} = 1024$ perechi cu suma 1, deci suma tuturor sumelor S_A când A parcurge mulțimea tuturor submulțimilor mulțimii X este $\boxed{1024}$.

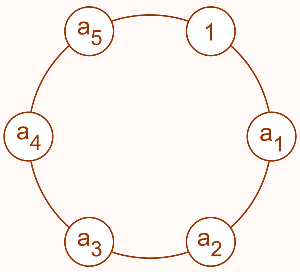
Răspuns corect: $\boxed{1024}$ .... $5p$

□

Problema 13

Pe un cerc sunt scrise numerele 1, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 în această ordine în sensul arcelor de ceasornic. În câte moduri distincte putem înlocui numerele a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, astfel încât valoarea absolută a diferenței oricăror două numere vecine să fie 1?
Adică, $|1 - a_1| = |a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = |a_3 - a_4| = |a_4 - a_5| = |a_5 - 1| = 1$.

profesor Dinu Șerbănescu, CN Sf. Sava, București



Demonstrație. Din $|1 - a_1| = |a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = |a_3 - a_4| = |a_4 - a_5| = |a_5 - 1| = 1 \implies$

$$1 - a_1 = \pm 1$$

$$a_1 - a_2 = \pm 1$$

$$a_2 - a_3 = \pm 1$$

$$a_3 - a_4 = \pm 1$$

$$a_4 - a_5 = \pm 1$$

$$a_5 - 1 = \pm 1.$$

Adunăm aceste egalități și obținem $0 = \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1 \pm 1$. Așadar, numărul de $+1$ trebuie să fie egal cu numărul celor de -1. Pentru orice combinație pe care o alegem care conține de 3 ori valoarea $+1$ și de 3 ori valoarea -1 vom avea o completare diferită a cercului. Acum problema revine la a stabili în câte moduri putem alege 3 elemente dintr-o mulțime de 6 elemente, ceea ce nu este complicat de făcut nici lexicografic. Altfel, primul element poate fi ales în 6 moduri, al doilea în cele 5 care au rămas neselectate și al treilea în alte 4 moduri. Pentru că într-o mulțime nu este importantă ordinea elementelor trebuie să eliminăm repetițiile. Fiecare triplet a, b, c va fi selectat în 6 moduri diferite: (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a), adică va trebui să împărțim la 6. Prin urmare, numărul secvențelor care au proprietatea cerută este $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = \boxed{20}$.

Răspuns corect: $\boxed{20}$ .... $5p$

□

Problema 14

În triunghiul scalen $\triangle ABC$ notăm cu h_a, h_b, respectiv h_c lungimile înălțimilor triunghiului care pleacă din vârfurile A, B, respectiv C. Știind că $h_a = 3$, $h_b = 7$ și $h_c \in \mathbb{Z}$ să se determine cea mai mică valoare pe care o poate lua h_c.

Demonstrație. Din formula ariei unui triunghi avem $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, de unde $a = \frac{2S}{h_a}$, $b = \frac{2S}{h_b}$, $c = \frac{2S}{h_c}$. Din inegalitatea triunghiului obținem $a + b > c > |a - b| \iff \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} > \frac{1}{h_c} > \left|\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b}\right| \iff \frac{1}{3} + \frac{1}{7} > \frac{1}{h_c} > \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right| \iff \frac{10}{21} > \frac{1}{h_c} > \frac{4}{21} \iff \frac{21}{10} < h_c < \frac{21}{4} \implies h_c \in \{3, 4, 5\}$, pentru că $h_c \in \mathbb{Z}$. Se pare că $h_c = 3$, dar triunghiul este scalen, prin urmare $h_c \neq h_a = 3$, așadar, cea mai mică valoare pe care o poate lua h_c este $\boxed{4}$.

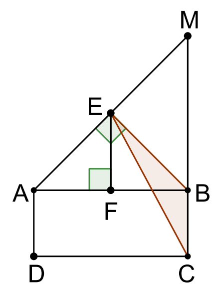
Răspuns corect: $\boxed{4}$ .... $5p$

□

Problema 15

Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 12$ cm și $BC = 5$ cm. În semiplanul determinat de dreapta AB care nu conține punctul C considerăm punctul E, astfel încât $AE = BE$ și aria triunghiului $\triangle ABE = 36$ cm^2. Să se determine aria triunghiului $\triangle AEC$.

Demonstrație.



Fie $EF \perp AB$, $F \in AB$ și $AE \cap BC = \{M\}$. Atunci $\mathcal{A}_{ABE} = \frac{AB \cdot EF}{2} \iff 36 = \frac{EF \cdot 12}{2} \iff EF = 6 \implies EF = \frac{AB}{2} \implies \triangle AEB$ este dreptunghic în E, conform reciprocei teoremei medianei.
Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle AEB \implies AE^2 + BE^2 = AB^2 \iff 2 \cdot AE^2 = 144 \iff AE = 6\sqrt{2}$.
Fie $AE \cap BC = \{M\}$. În $\triangle ABM$ știm că $m(\angle ABM) = 90°$ și $m(\angle BAM) = 45° \implies \triangle ABM$ este dreptunghic isoscel cu $AB = BM$. Cum BE este înălțimea corespunzătoare bazei rezultă că (BE) este și mediană, deci E este mijlocul laturii (AM). În $\triangle ACM$ segmentul (CE) este mediană, deci $\mathcal{A}_{ACE} = \frac{\mathcal{A}_{ACM}}{2}$.
$\mathcal{A}_{ACM} = \mathcal{A}_{ACB} + \mathcal{A}_{ABM} = \frac{AB \cdot BC}{2} + \frac{AB \cdot BM}{2} = \frac{12 \cdot 5}{2} + \frac{12 \cdot 12}{2} = 30 + 72 = 102$. În final obținem că aria triunghiului $\triangle AEC$ este $\boxed{51}$ cm^2.

Răspuns corect: $\boxed{51}$ .... $5p$

□

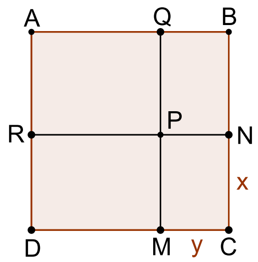
Problema 16

În interiorul pătratului $ABCD$ se consideră punctul P, iar pe laturile BC, respectiv CD se consideră punctele N, respectiv M, astfel încât:

- $PM \perp CD$;
- $PN \perp BC$;
- aria triunghiului $\triangle PMN$ este egală cu 12 cm^2.
- aria triunghiului $\triangle APM$ este egală cu 18 cm^2.
- aria triunghiului $\triangle APN$ este egală cu 33 cm^2.

Să se determine latura pătratului $ABCD$.

Demonstrație.



Vom nota cu $\{R\} = PN \cap AD$, $\{Q\} = PM \cap AB$.

- $MPNC$ este dreptunghi și $\mathcal{A}_{MPCN} = 2\mathcal{A}_{PMN} = 24$;
- în trapezul $MPAD$ știm că $\mathcal{A}_{DMP} = \mathcal{A}_{APM} = 18$;
- $DRPM$ este dreptunghi și $\mathcal{A}_{DRPM} = 2 \cdot \mathcal{A}_{DMP} = 36$;
- în trapezul $NPAB$ știm că $\mathcal{A}_{BNP} = \mathcal{A}_{APN} = 33$;
- $BNPQ$ este dreptunghi și $\mathcal{A}_{BNPQ} = 2 \cdot \mathcal{A}_{BNP} = 66$;

Vom nota cu $x = CN$, cu $y = CM$ și cu $l = AB$.

- $DRNC$ este dreptunghi și $\mathcal{A}_{DRNC} = \mathcal{A}_{DMPR} + \mathcal{A}_{MPNC} = 60$. În plus, $\mathcal{A}_{DRNC} = x \cdot l$, deci $x \cdot l = 60$;
- $MCBQ$ este dreptunghi și $\mathcal{A}_{MCBQ} = \mathcal{A}_{BQPN} + \mathcal{A}_{MPNC} = 90$. În plus, $\mathcal{A}_{MCBQ} = y \cdot l$, deci $y \cdot l = 90$;
- $\dfrac{y}{x} = \dfrac{90}{60} = \dfrac{3}{2} \implies y = \dfrac{3x}{2}$;
- $\mathcal{A}_{MPNC} = xy = 24 \iff \dfrac{3x^2}{2} = 24 \iff x = 4$. Dar $x \cdot l = 60 \iff l = 15$.

Latura pătratului $ABCD$ este de lungime $\boxed{15}$ cm.

Răspuns corect: $\boxed{15}$ .... $5p$

□

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 3 ore