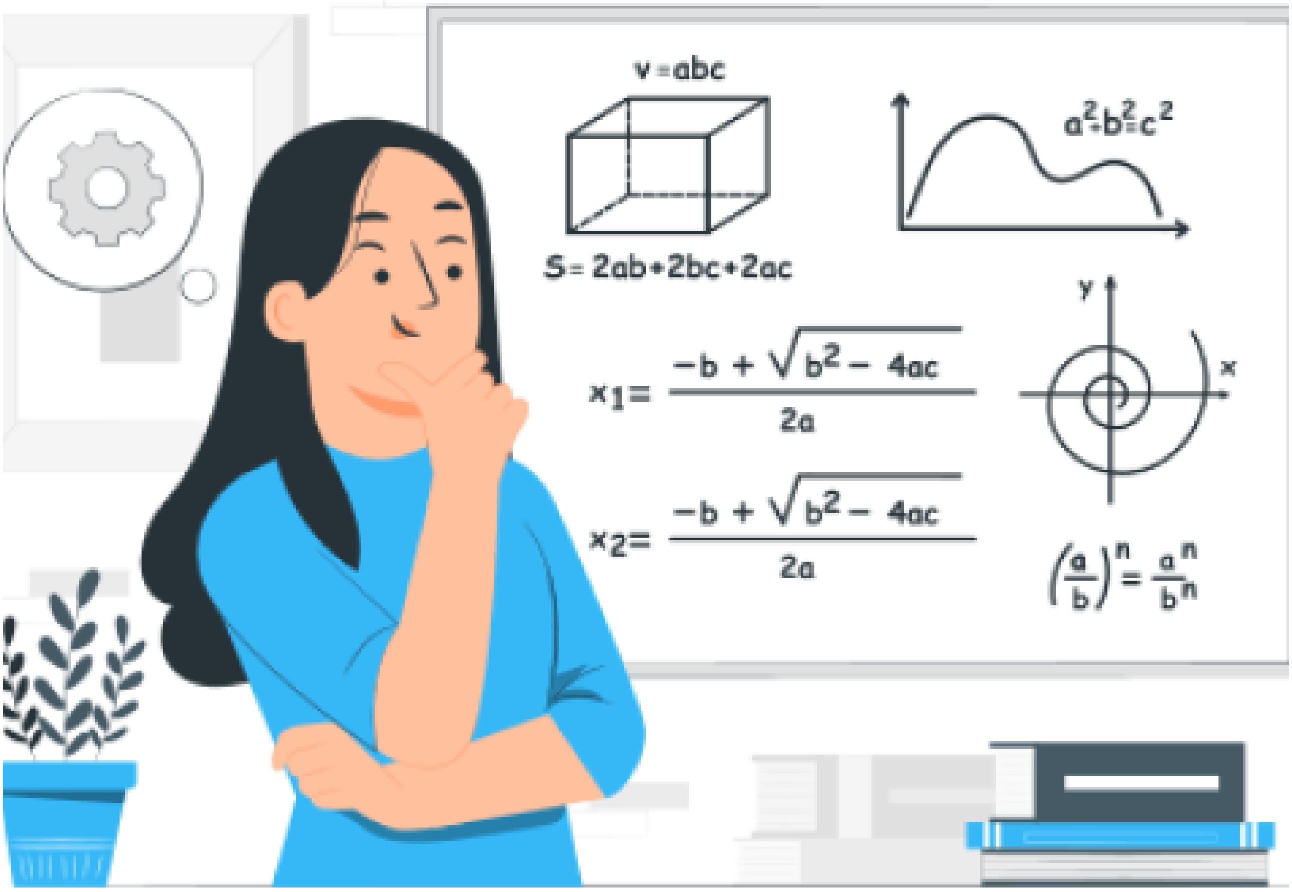


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022-2023

Etapa II
Clasa a VII-a

- Subiecte -
Lioara Ivanovici

§1 Subiecte

Problema 1

În triunghiul $\triangle ABC$ se consideră punctele $P \in (AC)$, $Q \in (AB)$ și $R \in (BC)$, astfel încât $AP = AQ$ și $BR = BQ$. Știind că $m(\angle ACB) = 70°$, să se determine măsura unghiului $\angle PQR$.

Problema 2

Un număr natural de şase cifre de forma $\overline{ababab}$ se numește „prieten cu şase" dacă și numai dacă $\dfrac{a \cdot b \cdot (a-b) \cdot (a+b)}{6} \in \mathbb{N}$. Câte numere naturale de şase cifre sunt „prietene cu şase"?

Problema 3

Cea mai mare valoare a numărului natural $\overline{abcd}$ pentru care are loc relația $\left(\overline{abc}\right)^2 = \left(\overline{dc}\right)^3$ este egală cu:

Problema 4

Fie x, y, z numere reale astfel încât au loc, simultan, relațiile $3x-5y+7 \geq 0$, $5y-7z+9 \geq 0$ și $7z-3x-16 \geq 0$. Determinați valoarea expresiei $3x-25y+28z$.

Problema 5

Numerele întregi a, b și c verifică relația $a+b+c = (a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a)$. Care este restul împărțirii lui $a+b+c$ la 27?

Problema 6

Numerele naturale nenule a, b, c sunt direct proporționale cu 5, 4, respectiv 3 și mulțimea $A = \left\{\dfrac{a^n}{b^n+c^n} | n \in \{0,1,2,3,...,2023\}\right\}$. Probabilitatea ca alegând la întâmplare un element din mulțimea A, acesta să reprezinte o fracție supraunitară este $\dfrac{m}{n}$, unde m, $n \in \mathbb{N}$, $(m,n) = 1$. Care este valoarea sumei $m+n$?

Problema 7

Se consideră numerele reale distincte și nenule x, y, și z astfel încât

$$xy + \frac{1}{yz} = yz + \frac{1}{zx} = zx + \frac{1}{xy}.$$

Să se determine valoarea pentru $|xyz|$, unde am notat cu $|a|$ modulul (sau valoarea absolută) a numărului a.

Problema 8

Unghiurile A și B de la baza trapezului $ABCD$ sunt complementare. Știind că baza mare are lungimea de 20 cm, baza mică are lungimea de 14 cm și M este mijlocul lui (AB), K este mijlocul lui (CD), să se calculeze MK.

Problema 9

Dintr-o urnă cu n bile $(n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3)$, numerotate de la 1 la n, se extrage o bilă. Știind că media aritmetică a numerelor scrise pe bilele rămase în urnă este $51,30$, să se determine numărul scris pe bila extrasă.

Problema 10

Câte numere naturale de 5 cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, astfel încât oricum am selecta trei cifre vecine acestea să nu fie scrise în ordine crescătoare sau în ordine descrescătoare?

De exemplu, numărul 13245 nu verifică condițiile pentru că secvența de trei cifre consecutive 245 este crescătoare, pe când numărul 15342 verifică condițiile.

Problema 11

Scriem pe o tablă 2023 de numere raționale:

$-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}, \ldots,\ -\frac{1}{1011},\ 0,\ \frac{1}{1011}, \ldots,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1$. Se aleg două dintre numerele de pe tablă, x și y, se șterg, iar în locul lor se pune rezultatul calculului $x - 43xy + y$. După mai multe astfel de operații pe tablă rămâne un singur număr pe care îl notăm $\frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $(a, b) = 1$. Care este valoarea sumei $a + b$?

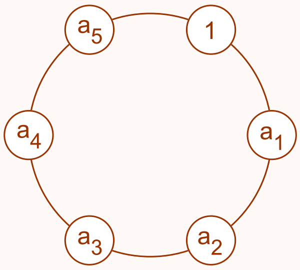
Problema 12

Pentru fiecare submulțime $A = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k\}$ cu $a_1 < a_2 < \ldots < a_{k-1} < a_k$ a mulțimii $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ notăm cu S_A numărul $S_A = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{k-1} \cdot a_k$. Să se afle care este suma tuturor numerelor S_A atunci când A parcurge mulțimea tuturor submulțimilor mulțimii X.

Problema 13

Pe un cerc sunt scrise numerele 1, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 în această ordine în sensul arcelor de ceasornic. În câte moduri distincte putem înlocui numerele a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, astfel încât valoarea absolută a diferenței oricăror două numere vecine să fie 1?
Adică, $|1 - a_1| = |a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = |a_3 - a_4| = |a_4 - a_5| = |a_5 - 1| = 1$.

profesor Dinu Șerbănescu, CN Sf. Sava, București



Problema 14

În triunghiul scalen $\triangle ABC$ notăm cu h_a, h_b, respectiv h_c lungimile înălțimilor triunghiului care pleacă din vârfurile A, B, respectiv C. Știind că $h_a = 3$, $h_b = 7$ și $h_c \in \mathbb{Z}$ să se determine cea mai mică valoare pe care o poate lua h_c.

Problema 15

Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 12$ cm și $BC = 5$ cm. În semiplanul determinat de dreapta AB care nu conține punctul C considerăm punctul E, astfel încât $AE = BE$ și aria triunghiului $\triangle ABE = 36$ cm^2. Să se determine aria triunghiului $\triangle AEC$.

Problema 16

În interiorul pătratului $ABCD$ se consideră punctul P, iar pe laturile BC, respectiv CD se consideră punctele N, respectiv M, astfel încât:

- $PM \perp CD$;
- $PN \perp BC$;
- aria triunghiului $\triangle PMN$ este egală cu 12 cm^2.
- aria triunghiului $\triangle APM$ este egală cu 18 cm^2.
- aria triunghiului $\triangle APN$ este egală cu 33 cm^2.

Să se determine latura pătratului $ABCD$.

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 3 ore