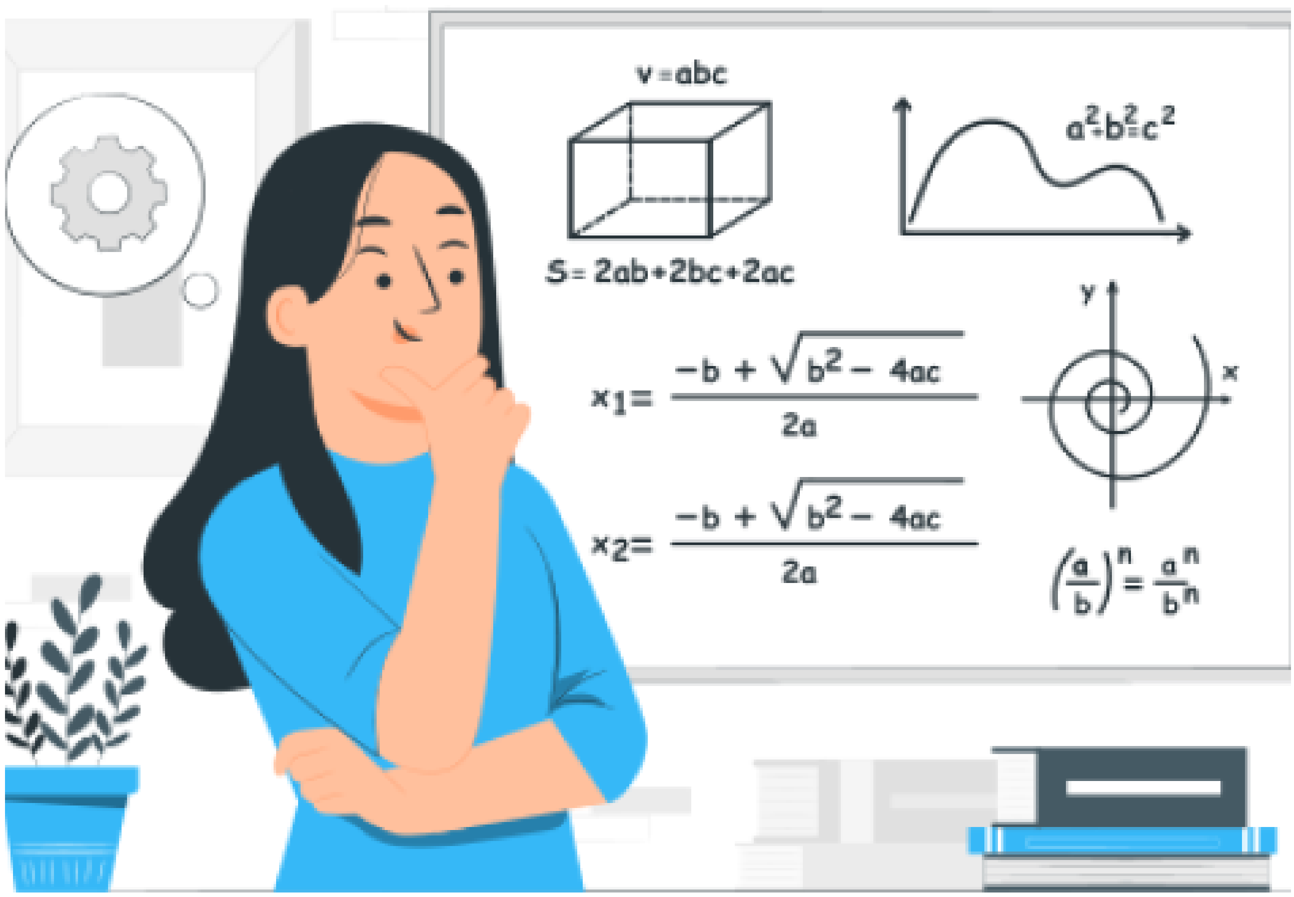


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022-2023

Etapa II
Clasa a VIII-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Dacă x, y, z sunt trei numere reale astfel încât

$$x = \sqrt{13 - 2yz},\ y = \sqrt{22 - 2zx},\ z = \sqrt{29 - 2xy},$$

atunci valoarea absolută a sumei $x + y + z$ este egală cu:

Demonstrație. Ridicăm cele trei relații la puterea a doua și obținem

$$x^2 = 13 - 2yz$$

$$y^2 = 22 - 2zx$$

$$z^2 = 29 - 2xy.$$

Prin adunarea acestor trei relații avem $x^2 + y^2 + z^2 = 64 - 2xy - 2yz - 2zx \iff x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 64 \iff (x + y + z)^2 = 64 \iff |x + y + z| = \boxed{8}$.

Răspuns corect: $\boxed{8}$ 5p

□

Problema 2

Numerele reale nenule p, q și r verifică egalitățile $p + q + r = 26$ și $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 31$. Determinați valoarea expresiei $\frac{p}{q} + \frac{q}{r} + \frac{r}{p} + \frac{p}{r} + \frac{r}{q} + \frac{q}{p}$.

Demonstrație. Înmulțim cele două relații din ipoteză și obținem $(p + q + r)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right) = 26 \cdot 31 \iff 1 + \frac{p}{q} + \frac{p}{r} + \frac{q}{p} + 1 + \frac{q}{r} + \frac{r}{p} + \frac{r}{q} + 1 = 806 \iff \frac{p}{q} + \frac{q}{r} + \frac{r}{p} + \frac{p}{r} + \frac{r}{q} + \frac{q}{p} = \boxed{803}$.

Răspuns corect: $\boxed{803}$ 5p

□

Problema 3

Care este valoarea absolută a sumei $1 - 4 - 9 + 16 + 25 - 36 - 49 + 64 + \ldots$, unde semnele alternează după primul termen astfel: două de minus, două de plus, două de minus, două de plus, iar ultimul termen este al 2022−lea pătrat perfect nenul.

Demonstrație. Grupăm termenii câte patru, astfel: $k^2 - (k + 1)^2 - (k + 2)^2 + (k + 3)^2 = k^2 - k^2 - 2k - 1 - k^2 - 4k - 4 + k^2 + 6k + 9 = 4$. În sumă sunt 2022 termeni, iar $2022 \not\vdots\ 4$, deci vom avea 505 grupe complete în care fiecare sumă este 4, iar ultimii doi termeni rămân negrupați.

$1 - 4 - 9 + 16 + 25 - 36 - 49 + 64 + \ldots + 2021^2 - 2022^2 = 4 + 4 + \ldots 4 + (2021 - 2022)(2021 + 2022) = 4 \cdot 505 - 4043 = -2023$. Valoarea absolută a acestui număr este $\boxed{2023}$.

Răspuns corect: $\boxed{2023}$ 5p

□

Problema 4

Numărul natural n este soluție a ecuației

$$(n+1)! + (n+2)! = 440 \cdot n!.$$

Care este suma cifrelor numărului n?
Am notat cu $n!$ produsul primelor n numere naturale nenule, adică $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Demonstrație. $(n+1)! + (n+2)! = 440 \cdot n! \iff n! \cdot (n+1) + n! \cdot (n+1)(n+2) = 440 \cdot n! \iff n + 1 + (n+1)(n+2) = 440 \iff n^2 + 4n + 3 = 440 \iff n^2 + 4n + 4 = 441 \iff (n+2)^2 = 21^2 \implies n + 2 \in \{-21, 21\}$. Pentru $n + 2 = -21$ nu obținem soluție număr natural, iar pentru $n + 2 = 21 \implies n = 19$. Suma cifrelor numărului n este egală cu $\boxed{10}$.

Răspuns corect: $\boxed{10}$ .... $5p$

□

Problema 5

Suma soluțiilor reale ale ecuației

$$(5 - x)\left(2\sqrt{6} - 5\right) = x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 25 - 10x}$$

este egală cu:

Demonstrație. Cum $x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 25 - 10x} \geq 0 \implies (5 - x)\left(2\sqrt{6} - 5\right) \geq 0$.
$2\sqrt{6} = \sqrt{24} < \sqrt{25} = 5 \implies 2\sqrt{6} - 5 < 0$, deci și $5 - x \leq 0 \iff x \geq 5 \implies |x - 5| = x - 5$.

$$(5 - x)\left(2\sqrt{6} - 5\right) = x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 25 - 10x} \iff$$

$$(5 - x)\left(2\sqrt{6} - 5\right) = x^2 \cdot \sqrt{(x-5)^2} \iff$$

$$(5 - x)\left(2\sqrt{6} - 5\right) = x^2 \cdot |x - 5| \iff$$

$$(5 - x)\left(2\sqrt{6} - 5\right) = x^2 \cdot (x - 5) \iff$$

$$(x - 5)(x^2 + 2\sqrt{6} - 5) = 0$$

Așadar $x - 5 = 0$ sau $x^2 = 5 - 2\sqrt{6}$. În primul caz obținem soluția $x_1 = 5$, iar a doua ecuație este echivalentă cu $x^2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$, care are soluțiile $x_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ și $x_3 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$. Însă, din condițiile de existență, am obținut că $x \geq 5$, deci x_2 și x_3 nu sunt soluții ale ecuației pentru că sunt ambele mai mici decât 5. Prin urmare, singura soluție este $x = 5$ cu suma $\boxed{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{5}$ .... $5p$

□

Problema 6

Fie $a \in \mathbb{R}$, astfel încât are loc incluziunea $\{0, a^3\} \subset (a, \infty)$. Care este pătratul părții întregi a numărului a?

Demonstrație. $0 \in (a, \infty) \implies a < 0$. Analog obținem că $a < a^3 \iff 0 < a(a^2 - 1)$ și cum $a < 0 \implies a^2 < 1 \iff |a| < 1 \iff -1 < a < 1$. Dar $a < 0 \implies -1 < a < 0$ și $\lfloor a \rfloor = -1$. Pătratul părții întregi a numărului a este egal cu $\boxed{1}$.

Răspuns corect: $\boxed{1}$ .... $5p$

$\square$

Problema 7

Se consideră numerele întregi x și y pentru care $\dfrac{6x-7}{y^2+2}$ și $\dfrac{10y-23}{x^2+2}$ sunt numere naturale. Numărul perechilor (x, y) este egal cu:

Demonstrație. O primă condiție ca cele două fracții să fie numere naturale este $\dfrac{6x-7}{y^2+2} \geq 0$ și $\dfrac{10y-23}{x^2+2} \geq 0 \iff 6x-7 \geq 0$ și $10y-23 \geq 0$. De aici obținem $x \geq 2$ și $y \geq 3$.
Pe de altă parte, $\dfrac{6x-7}{y^2+2}$ și $\dfrac{10y-23}{x^2+2}$ sunt numere naturale implică:

$$\frac{6x-7}{y^2+2} \cdot \frac{10y-23}{x^2+2} \in \mathbb{N} \implies$$

$$\frac{(6x-7)(10y-23)}{(y^2+2)(x^2+2)} \in \mathbb{N} \implies$$

$$(6x-7)(10y-23) \geq (y^2+2)(x^2+2).$$

Vom demonstra că această inegalitate are loc în sens invers.

$$6x-7 \leq x^2+2 \iff 0 \leq x^2-6x+9 \iff 0 \leq (x-3)^2.$$

$$10y-23 \leq y^2+2 \iff 0 \leq y^2-10y+25 \iff 0 \leq (y-5)^2.$$

Cum $6x-7 > 0$ și $10y-23 > 0$, obținem înmulțind relațiile de mai sus

$$(6x-7)(10y-23) \leq (y^2+2)(x^2+2).$$

Așadar, $(6x-7)(10y-23) \geq (y^2+2)(x^2+2) \iff x = 3$ și $y = 5$.

- Dacă $x = 3 \implies \dfrac{6x-7}{y^2+2} = \dfrac{11}{y^2+2} \in \mathbb{N} \implies y^2+2 \mid 11$ cu soluția unică $y = 3$. A doua fracție devine $\dfrac{10y-23}{x^2+2} = \dfrac{7}{11} \notin \mathbb{N}$, deci în acest caz nu avem soluții.
- Dacă $y = 5$ a doua fracție este $\dfrac{10y-23}{x^2+2} = \dfrac{27}{x^2+2}$ și aceasta este număr natural dacă și numai dacă $x^2+2 \mid 27 \iff x^2+2 \in \{1, 3, 9, 27\} \implies x \in \{1, 5\}$. Dar, din condițiile inițiale știm că $x \geq 2$, deci avem o unică valoare posibilă pentru $x = 5$. Prima fracție devine $\dfrac{6x-7}{y^2+2} = \dfrac{23}{27} \notin \mathbb{N}$.

Prin urmare, numărul de perechi (x, y) care sunt soluții ale problemei este $\boxed{0}$.
Răspuns corect: $\boxed{0}$ .... $5p$

$\square$

Problema 8

Se consideră expresia

$$E(x) = \left(x - 1^2\right)\left(x - 2^2\right)\cdots\left(x - 100^2\right).$$

Pentru câte valori întregi ale lui x are loc $E(x) \leq 0$?

Demonstrație. Observăm că $E(x) \leq 0 \iff (2k-1)^2 \leq x \leq (2k)^2$, $k \in \{1, 2, 3, \ldots 50\}$. În fiecare astfel de interval sunt $(2k)^2 - (2k-1)^2 + 1$ numere. Prelucrăm această expresie și devine $(2k+2k-1)(2k-2k+1)+1 = 4k$. Suma pe care o avem de calculat este $4\cdot1+4\cdot2+\cdots+4\cdots50 = 4\cdot(1+2+\cdots+50) = 4\cdot\dfrac{50\cdot51}{2} = 5100$. Numărul valorilor întregi pentru care expresia $E(x)$ este negativă este egal cu $\boxed{5100}$.

Răspuns corect: $\boxed{5100}$ .... $5p$

□

Problema 9

Numerele naturale $x_1, x_2, \ldots x_{10}$ au proprietatea că $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 17$. Care este cea mai mică valoare pe care o poate lua suma $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2$?

Demonstrație. Pentru fiecare număr întreg x are loc inegalitatea $(x-1)(x-2) \geq 0$. Pentru $x \leq 0$ atât $x-1$, cât și $x-2$ sunt numere negative, deci produsul lor este pozitiv. Pentru $x \in \{1, 2\}$ are loc cazul de egalitate, iar pentru $x > 2$ fiecare factor este pozitiv, deci și produsul lor este pozitiv.

$(x_i - 1)(x_i - 2) \geq 0 \iff x_i^2 - 3x_i + 2 \geq 0 \iff x_i^2 \geq 3x_i - 2$. Adunăm cele 10 inegalități și obținem $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2 \geq 3\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}\right) - 20 = 31$. Cazul de egalitate are loc atunci când 3 dintre numere sunt egale cu 1 și restul sunt egale cu 2. Valoarea minimă a sumei $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2$ este $\boxed{31}$.

Răspuns corect: $\boxed{31}$ .... $5p$

□

Problema 10

Care este numărul de elemente raționale din mulțimea $A = \left\{x^{a\cdot b} \,\middle|\, a + b = 36,\ a,\ b \in \mathbb{N}^*\right\}$, unde x este un număr irațional fixat pentru care 36 este cel mai mic număr natural nenul astfel încât numărul x^{36} este număr rațional?

Demonstrație. Pentru început vom căuta numerele naturale m pentru care $x^m \in \mathbb{Q}$. Cum 36 este cel mai mic număr natural nenul pentru care $x^{36} \in \mathbb{Q} \implies x^k \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ pentru orice $0 < k < 36$, $k \in \mathbb{N}$ și $x \neq 0$.

Fie $m = 36\cdot k + r$, $k, r \in \mathbb{N}$, $0 < r < 36$. Atunci, $x^m = x^{36\cdot k + r} = x^{36\cdot k}\cdot x^r = \left(x^{36}\right)^k \cdot x^r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ pentru că $x^{36k} \in \mathbb{Q}^*$ și $x^r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Așadar, $x^m \in \mathbb{Q} \iff m = 36\cdot k$. În final obținem că $x^{a\cdot b} \in A \cap \mathbb{Q} \iff a\cdot b = 36\cdot k$ și $a + b = 36$. Din $a + b = 36 \implies b = 36 - a$ și înlocuind în prima ecuație obținem $a\cdot(36 - a) = 36\cdot k \iff a^2 = 36\cdot a - 36\cdot k \implies 36 \mid a^2 \implies 6 \mid a$. Cum $a \neq 0$ și $a < 36$ obținem soluțiile $(a, b) \in \{(6, 30), (12, 24), (18, 18), (24, 12), (30, 6)$. Însă într-o mulțime un element se scrie o singură dată și perechile de soluții $(6, 30)$, $(30, 6)$, respectiv $(12, 24)$ și $(24, 12)$ dau aceleași rezultate. Prin urmare, numărul de elemente raționale din mulțimea A este $\boxed{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{3}$ .... $5p$

□

Problema 11

Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi pentru care $a+b+c=12$. Determinați cea mai mică valoare a expresiei $M = \dfrac{a}{b+c-a} + \dfrac{4b}{c+a-b} + \dfrac{9c}{a+b-c}$.

Demonstrație. Folosim substituția Ravi și rescriem laturile triunghiului $a = x+y$, $b = y+z$, $c = z+x$.

$$M = \frac{x+y}{2z} + \frac{2(y+z)}{x} + \frac{9(z+x)}{2y} = \frac{x}{2z} + \frac{2z}{x} + \frac{y}{2z} + \frac{9z}{2y} + \frac{2y}{x} + \frac{9x}{2y}.$$

Aplicăm inegalitatea dintre media aritmetica și media geometrică și obținem

$$\frac{x}{2z} + \frac{2z}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{2z} \cdot \frac{2z}{x}} = 2,$$

$$\frac{y}{2z} + \frac{9z}{2y} \geq 2\sqrt{\frac{y}{2z} \cdot \frac{9z}{2y}} = 3$$

$$\frac{2y}{x} + \frac{9x}{2y} \geq 2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{9x}{2y}} = 6.$$

Deci, $M \geq 11$. Este necesar să găsim și cazul de egalitate, iar acesta se întâmplă când numerele pentru care se aplică inegalitatea mediilor sunt egale, adică

$$\frac{x}{2z} = \frac{2z}{x} \iff x = 2z;$$

$$\frac{y}{2z} = \frac{9z}{2y} \iff y = 3z$$

$$\frac{2y}{x} = \frac{9x}{2y} \iff 2y = 3x.$$

În aceste condiții laturile triunghiului se rescriu $a = 5z$, $b = 4z$ și $c = 3z$. Din $a+b+c = 12$ obținem soluțiile $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$ și $a = 5$, $b = 4$ și $c = 3$. Valoarea minimă a expresiei M este egală cu $\boxed{11}$.

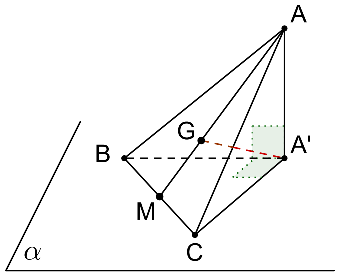
Răspuns corect: $\boxed{11}$ .... $5p$

□

Problema 12

Fie $\triangle ABC$ echilateral de latura $12\sqrt{6}$, având centrul de greutate în G. Planul α trece prin dreapta BC, astfel încât $m(\angle BA'C) = 90°$, unde A' este proiecția punctului A pe planul α. Să se determine lungimea segmentului $A'G$.

Demonstrație.



Problema trebuie înțeleasă astfel: triunghiul echilateral $\triangle ABC$ are latura (BC) inclusă în planul α, iar A' este proiecția punctului A pe planul α. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului $\triangle ABC$, să se afle lungimea segmentului $A'G$ în funcție de latura triunghiului $\triangle ABC$.
Vom nota cu l lungimea laturii (AB). Să observăm mai întâi că $\triangle AA'B \equiv \triangle AA'C$ în cazul de congruență de la triunghiuri dreptunghice IC. De aici rezultă că $A'B = A'C$, deci triunghiul $\triangle A'BC$ este triunghi dreptunghic isoscel și lungimile catetelor sunt $\frac{l\sqrt{2}}{2}$. Într-adevăr, aplicăm teorema lui Pitagora și avem $A'B^2 + A'C^2 = BC^2 \iff 2 \cdot A'B^2 = l^2 \iff A'B = \frac{l\sqrt{2}}{2}$.
Aplicăm din nou teorema lui Pitagora în $\triangle AA'B \implies A'A^2 = AB^2 - A'B^2 \iff A'A = \frac{l\sqrt{2}}{2}$.
Prin urmare, piramida $A'ABC$ este o piramidă regulată de bază $\triangle ABC$ și înălțimea din A' pică în centrul cercului circumscris bazei, care coincide cu centrul de greutate al acesteia fiind triunghi echilateral. Cum $A'G \perp (ABC)$, $GA \subset (ABC) \implies A'G \perp AG$. Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle A'GA$ și obținem $A'G^2 + GA^2 = A'A^2 \iff A'G^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2 \iff$ $A'G = \frac{l\sqrt{6}}{6} = \boxed{12}$.

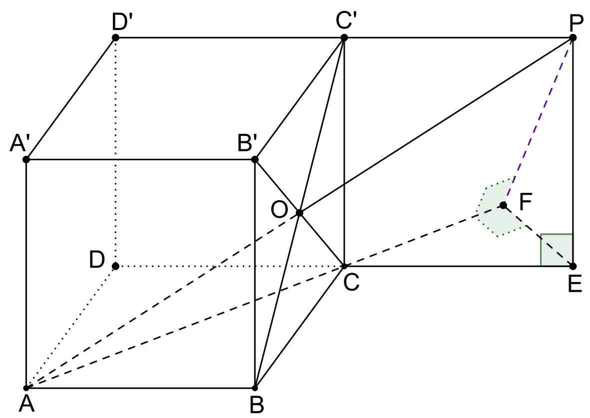
Răspuns corect: $\boxed{12}$ .... $5p$

□

Problema 13

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu $AB = 4$ cm și $BC' \cap B'C = \{O\}$. Dacă $AO \cap D'C' = \{P\}$, determinați pătratul distanței de la punctul P la dreapta AC.

Demonstrație.



Fie $PE \perp DC$. Cum $(DCC') \perp (ABC)$, $(DCC') \cap (ABC) = DC$ și $P \in D'C' \subset (DCC')$ rezultă $PE \perp (ABC)$. Fie $EF \perp AC$, atunci $PF \perp AC$ (am aplicat teorema celor 3 perpendiculare) și deci PF reprezintă distanţa cerută. În $\triangle APD'$, $OC' \parallel AD'$ și $OC' = \frac{AD'}{2}$; prin urmare

$D'C' = C'P$ și atunci $CC'PE$ este pătrat cu latura de 4 cm. În $\triangle CEF$, dreptunghic în F, avem $CE = 4$ cm și $m(\angle ECF) = m(\angle ACD) = 45°$, de unde $EF = 2\sqrt{2}$ cm. Acum, în $\triangle PEF$, avem $PE = 4$ cm și $EF = 2\sqrt{2}$ cm, rezultă $PF = 2\sqrt{6}$ cm. Pătratul distanței de la punctul P la dreapta AC este egal cu $\boxed{24}$.

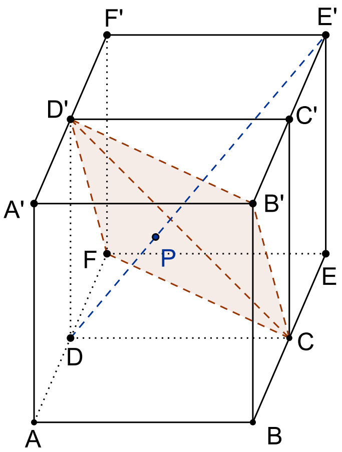
Răspuns corect: $\boxed{24}$ .... $5p$

□

Problema 14

În cubul $ABCDA'B'C"D'$ de latură $AB = 17\sqrt{6}$ cm notăm cu P proiecția punctului D pe planul $(B'CD')$. Să se determine lungimea segmentului (CP) exprimată în cm.

Demonstrație.



Proiecția punctului D pe planul $(B'CD')$ "pică" în exteriorul cubului. Pentru a vizualiza punctul "lipim" un cub de aceeași latură și cu fața comună $DCC'D'$. Fie acesta $DCEFD'C'E'F'$. Cum $B'C \parallel A'D$, $A'D \parallel D'F \implies B'C \parallel D'F \implies$ punctele B', D', C și F sunt coplanare. Vom demonstra că $DE' \perp (CD'F)$, deci proiecția punctului D pe planul $(B'CD')$ este proiecția pe planul (CFD') Vom demonstra că acesta este intersecția dintre dreapta DE' și planul (CFD'). Știm că $DD' \perp (DCE)$, $CF \subset (DCE) \implies DD' \perp CF$. Dar și $CF \perp DE$, $DE \cap DD' = \{D\}$, DD', $DE \subset (DEE') \implies CF \perp (DEE')$, $DE' \subset (DEE') \implies CF \perp DE'$. Analog se demonstrează că $CD' \perp DE'$, de unde obținem că $DE' \perp (CFD')$.

Piramida triunghiulară $DD'FC$ are muchiile laterale congruente $DC = DF = DD'$ și baza este $\triangle FCD'$, care este echilateral de latură $l\sqrt{2}$, unde l este latura cubului, deci este piramidă regulată. Într-o piramidă triunghiulară regulată înălțimea corespunzătoare bazei intersectează planul bazei în centrul cercului circumscris bazei, deci P este centrul cercului circumscris al $\triangle CFD'$ și CP este raza cercului circumscris triunghiului $\triangle FCD' \implies CP = \dfrac{CF\sqrt{3}}{3} = \dfrac{l\sqrt{6}}{3} = \dfrac{17\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}{3} = \boxed{34}$ cm.

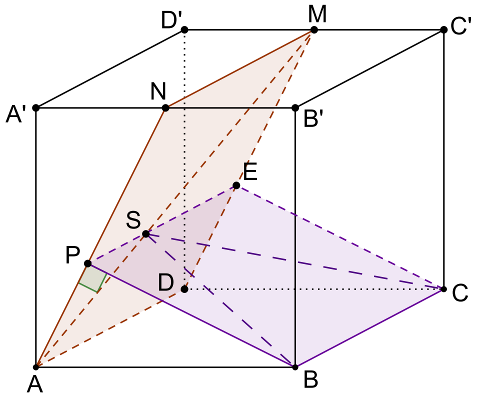
Răspuns corect: $\boxed{34}$ .... $5p$

□

Problema 15

În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu dimensiunile $AB = 5$ cm, $BC = 13$ cm și $AA' = 6$ cm, considerăm $M \in (C'D')$, $(MC') \equiv (MD')$ și S un punct oarecare pe dreapta AM. Să se determine valoarea minimă a ariei triunghiului $\triangle SBC$ exprimată în cm^2 atunci când S poate ocupa orice poziție pe dreapta AM.

Demonstrație. $\mathcal{A}_{SBC} = \dfrac{BC \cdot d(S, BC)}{2}$ este minimă când $d(S, BC)$ este minimă, adică este perpendiculara comună a dreptelor AM și BC. Este natural să construim planul paralel cu BC care conține dreapta AM. Pentru aceasta considerăm punctul N mijlocul lui $(A'B')$. Punctele A, D, M, N sunt coplanare (pentru că $MN \parallel AD$). Deoarece $BC \parallel AD$, $AD \subset (ADMN) \implies BC \parallel (ADMN)$.



De aici obținem că lungimea perpendicularei comune a dreptelor AM și BC este lungimea perpendicularei dintr-un punct al lui BC pe planul $(ADMN)$. Fie $BP \perp AN$, $P \in AN$. Știm că $AD \perp (ABB')$, $BP \subset (ABB') \implies AD \perp BP$. Așadar $BP \perp (ADMN)$, $AM \subset (ADMN) \implies BP \perp AM$ (1). Dar și $BC \perp (ABB')$, $BP \subset (ABB') \implies BC \perp BP$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $d(BC, AM) = BP$.
O metodă de a afla măsura lui (BP) este de a exprima aria triunghiului $\triangle ANB$ în două moduri. O dată $\mathcal{A}_{ANB} = \dfrac{1}{2} \cdot \mathcal{A}_{ABB'A'} = 15$. Altfel, $\mathcal{A}_{ANB} = \dfrac{BP \cdot AN}{2}$. Pentru a determina AN aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle AA'N$ și se obține $AN = \dfrac{13}{2}$ și apoi $BP = \dfrac{60}{13}$.
Valoarea minimă a ariei triunghiului $\triangle SBC$ este $\mathcal{A}_{SBC} = \dfrac{BP \cdot BC}{2} = \boxed{30 \text{ cm}^2}$.

Răspuns corect: $\boxed{30}$ 5*p*

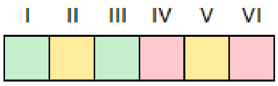
□

Problema 16

Câte numere de 6 cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6 astfel încât diferența dintre oricare două cifre vecine să nu fie egală cu 3?

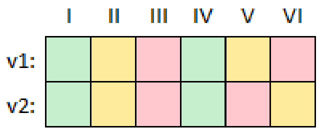
Demonstrație. Perechile de cifre care nu pot fi consecutive sunt $(1, 4)$, $(2, 5)$ și $(3, 6)$. Vom fixa aceste perechi astfel încât numerele obținute să corespundă cerinței. Vom face numărarea după locul ocupat în număr și vom începe prin a fixa cifra de pe prima poziție. Vom numerota pozițiile cu I, II, III, IV, V, VI.

- Prima pereche ocupă pozițiile I, III, atunci a doua pereche poate ocupa doar pozițiile II, V și a treia ce a rămas, adică IV, VI.

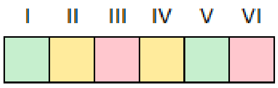


A doua pereche nu poate ocupa pozițiile II, IV, nici II, VI pentru că pentru a treia pereche ar rămâne disponibile poziții consecutive. Așadar, în acest caz, perechile de poziții sunt ocupate în mod unic, exceptând permutările pe care le vom număra la final.

- Prima pereche ocupa pozițiile I, IV, atunci a doua pereche poate ocupa pozițiile II, V sau II, VI și a treia ce a rămas, adică III, VI sau III, V. În acest caz exista două variante de ocupare a perechilor de poziții.

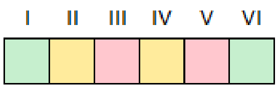


- Prima pereche ocupă pozițiile I, V, atunci a doua pereche poate ocupa doar pozițiile II, IV și a treia ce a rămas, adică III, VI.



A doua pereche nu poate ocupa poziția II, VI, pentru că pentru a treia pereche ar rămâne disponibilă poziția consecutivă III, IV. Așadar, în acest caz, perechile de poziții sunt ocupate în mod unic.

- Prima pereche ocupă pozițiile I, VI, atunci a doua pereche ocupă pozițiile II, IV în mod unic pentru că, altfel, a treia pereche ar fi pe pozițiile consecutive III, IV. Și în acest caz pozițiile sunt ocupate în mod unic.



Acum, prima pereche poate fi oricare dintre cele 3, adică poate fi aleasă în 3 moduri. A doua pereche poate fi oricare dintre cele două care au rămas, adică poate fi aleasă în două moduri și pentru a treia a rămas o singură variantă. Prin urmare, perechile de cifre pot fi alese în $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ moduri pentru fiecare dintre situațiile studiate la punctele a, b, c, d. În fiecare pereche cele două cifre pot fi permutate în două moduri, deci pentru fiecare dintre cele 5 fixări ale pozițiilor sunt $6 \cdot 2^3 = 48$ permutări și, în final, numărul numerelor care respectă cerința este $5 \cdot 48 = \boxed{240}$.

Răspuns corect: $\boxed{240}$ .... $5p$

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 3 ore