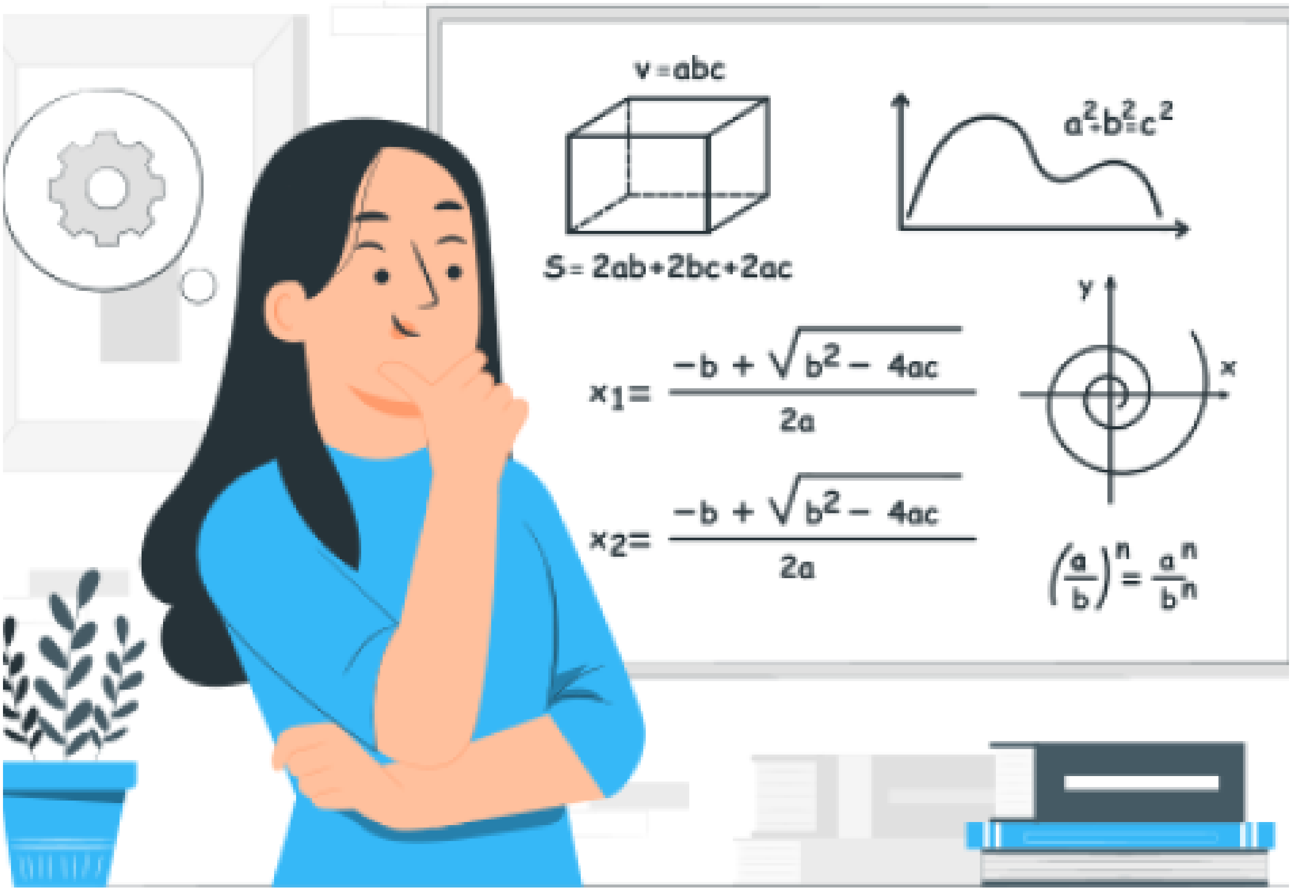

Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022-2023

Etapa II
Clasa a VIII-a

- Subiecte -
Lioara Ivanovici

§1 Subiecte

Problema 1

Dacă x, y, z sunt trei numere reale astfel încât

$$x = \sqrt{13 - 2yz},\ y = \sqrt{22 - 2zx},\ z = \sqrt{29 - 2xy},$$

atunci valoarea absolută a sumei $x + y + z$ este egală cu:

Problema 2

Numerele reale nenule p, q și r verifică egalitățile $p + q + r = 26$ și $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 31$. Determinați valoarea expresiei $\frac{p}{q} + \frac{q}{r} + \frac{r}{p} + \frac{p}{r} + \frac{r}{q} + \frac{q}{p}$.

Problema 3

Care este valoarea absolută a sumei $1 - 4 - 9 + 16 + 25 - 36 - 49 + 64 + \ldots$, unde semnele alternează după primul termen astfel: două de minus, două de plus, două de minus, două de plus, iar ultimul termen este al 2022−lea pătrat perfect nenul.

Problema 4

Numărul natural n este soluție a ecuației

$$(n + 1)! + (n + 2)! = 440 \cdot n!.$$

Care este suma cifrelor numărului n?
Am notat cu $n!$ produsul primelor n numere naturale nenule, adică $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Problema 5

Suma soluțiilor reale ale ecuației

$$(5 - x)\left(2\sqrt{6} - 5\right) = x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 25 - 10x}$$

este egală cu:

Problema 6

Fie $a \in \mathbb{R}$, astfel încât are loc incluziunea $\{0, a^3\} \subset (a, \infty)$. Care este pătratul părții întregi a numărului a?

Problema 7

Se consideră numerele întregi x și y pentru care $\frac{6x - 7}{y^2 + 2}$ și $\frac{10y - 23}{x^2 + 2}$ sunt numere naturale. Numărul perechilor (x, y) este egal cu:

Problema 8

Se consideră expresia

$$E(x) = \left(x - 1^2\right)\left(x - 2^2\right)\cdots\left(x - 100^2\right).$$

Pentru câte valori întregi ale lui x are loc $E(x) \leq 0$?

Problema 9

Numerele naturale $x_1, x_2, \ldots x_{10}$ au proprietatea că $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 17$. Care este cea mai mică valoare pe care o poate lua suma $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2$?

Problema 10

Care este numărul de elemente raționale din mulțimea $A = \left\{x^{a\cdot b} \,\middle|\, a + b = 36,\ a,\ b \in \mathbb{N}^*\right\}$, unde x este un număr irațional fixat pentru care 36 este cel mai mic număr natural nenul astfel încât numărul x^{36} este număr rațional?

Problema 11

Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi pentru care $a + b + c = 12$. Determinați cea mai mică valoare a expresiei $M = \dfrac{a}{b+c-a} + \dfrac{4b}{c+a-b} + \dfrac{9c}{a+b-c}$.

Problema 12

Fie $\triangle ABC$ echilateral de latura $12\sqrt{6}$, având centrul de greutate în G. Planul α trece prin dreapta BC, astfel încât $m(\angle BA'C) = 90°$, unde A' este proiecția punctului A pe planul α. Să se determine lungimea segmentului $A'G$.

Problema 13

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu $AB = 4$ cm și $BC' \cap B'C = \{O\}$. Dacă $AO \cap D'C' = \{P\}$, determinați pătratul distanței de la punctul P la dreapta AC.

Problema 14

În cubul $ABCDA'B'C"D'$ de latură $AB = 17\sqrt{6}$ cm notăm cu P proiecția punctului D pe planul $(B'CD')$. Să se determine lungimea segmentului (CP) exprimată în cm.

Problema 15

În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu dimensiunile $AB = 5$ cm, $BC = 13$ cm și $AA' = 6$ cm, considerăm $M \in (C'D')$, $(MC') \equiv (MD')$ și S un punct oarecare pe dreapta AM. Să se determine valoarea minimă a ariei triunghiului $\triangle SBC$ exprimată în cm^2 atunci când S poate ocupa orice poziție pe dreapta AM.

Problema 16

Câte numere de 6 cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6 astfel încât diferența dintre oricare două cifre vecine să nu fie egală cu 3?

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 3 ore