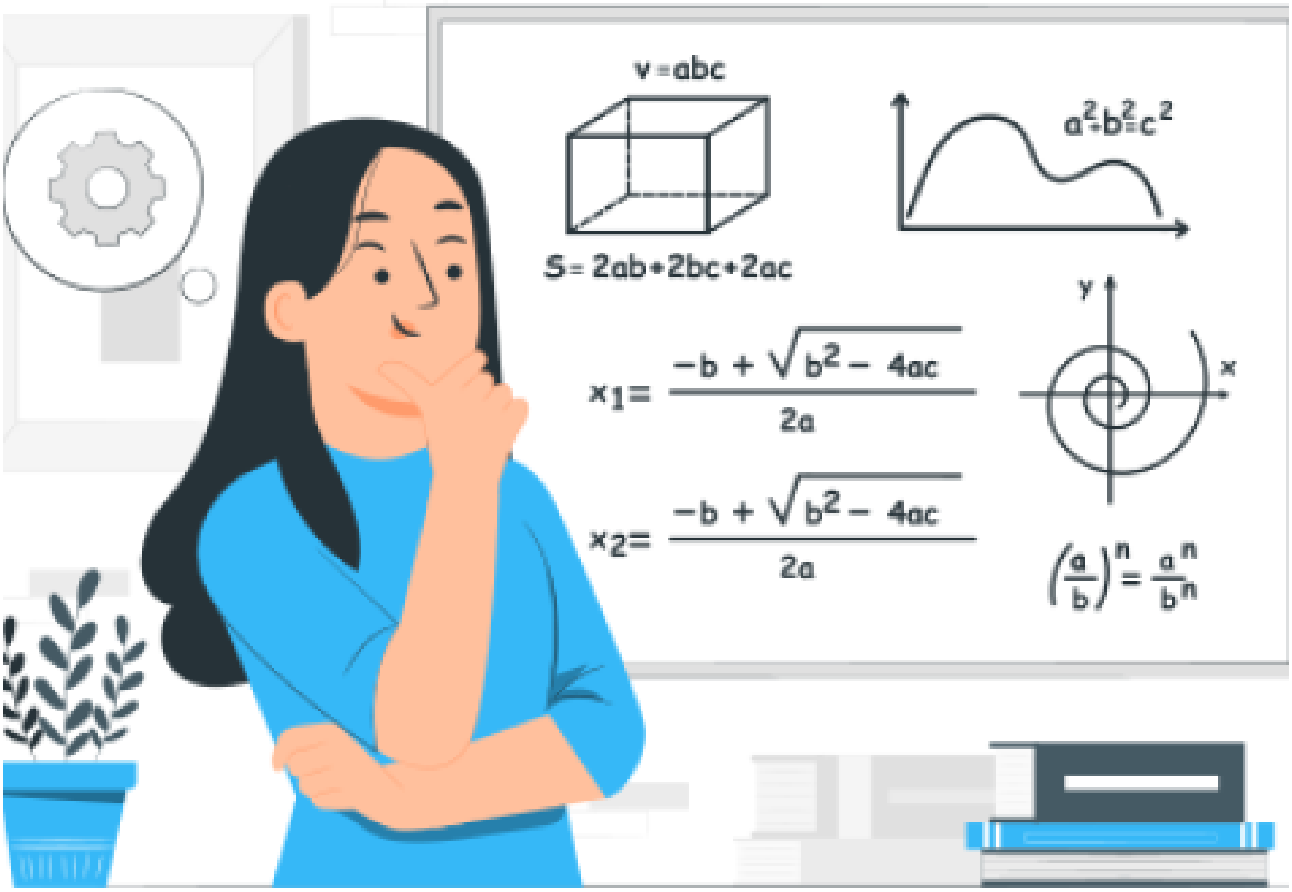

Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022

Etapa III
Clasa a V-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1 a) Să se arate că nu putem pune în vârfurile unui cub 8 numere distincte din șirul de numere naturale consecutive n, $n+1$, $n+2$, ..., $n+12$, astfel încât suma numerelor din oricare două vârfuri unite printr-o muchie a cubului sa fie divizibilă cu 2.

b) Pentru care valori ale lui n se pot pune în vârfurile unui cub 8 numere distincte din șirul de pătrate perfecte consecutive n^2, $(n+1)^2$, $(n+2)^2$, ..., $(n+10)^2$ astfel încât diferența numerelor din oricare două vârfuri unite printr-o muchie a cubului să fie divizibilă cu 3?

Demonstrație.

a) Pentru ca suma numerelor scrise în extremitățile unei muchii să fie pară este necesar ca cele două numere să aibă aceeași paritate. Mai mult, dintr-un vârf pleacă trei muchii, deci toate cele patru vârfuri trebuie să aibă aceeași paritate. Continuând raționamentul obținem că toate cele 8 numere scrise în vârfuri au aceeași paritate. Dar între cele 13 numere consecutive pe care le avem la dispoziție cel mult 7 au aceeași paritate, restul având paritatea opusă. Numerele n, $n+2$, $n+4$, $n+6$, $n+8$, $n+10$, $n+12$ sunt cele 7 numere care au aceeași paritate, dar sunt insuficiente.

b) Diferența a două numere naturale este divizibilă cu 3 dacă și numai dacă dau același rest la împărțirea cu 3. Pentru ca cerința să fie realizabilă este necesar ca în vârfuri să punem numere care dau același rest la împărțirea cu 3.

- Pătratele perfecte dau resturile 0 sau 1 la împărțirea cu 3, mai precis, pătratul unui număr divizibil cu 3 este și el divizibil cu 3, pătratul unui număr care nu este divizibil cu 3 dă restul 1 la împărțirea cu 3.
- Dintre trei numere naturale consecutive exact unul este divizibil cu 3 și pătratele celorlalte două dau restul 1 la împărțirea cu 3.

Cele 11 numere se împart în trei grupe a câte trei numere consecutive, iar ultimele 2 le punem în a patra grupă. Din fiecare grupă exact un număr este divizibil cu 3, deci numărul maxim de pătrate divizibile cu 3 este 4. Prin urmare, în cele 8 vârfuri nu putem pune numere divizibile cu 3 pentru că sunt insuficiente.

- Dacă $3 \mid n$, atunci pătratele din șir care dau resturi nenule la împărțirea cu 3 sunt $(n+1)^2$, $(n+2)^2$, $(n+4)^2$, $(n+5)^2$, $(n+7)^2$, $(n+8)^2$, $(n+10)^2$. Obținem în final 7 numere care sunt insuficiente.
- Dacă $3 \mid (n+1)$, atunci pătratele din șir care dau resturi nenule la împărțirea cu 3 sunt n^2, $(n+2)^2$, $(n+3)^2$, $(n+5)^2$, $(n+6)^2$, $(n+8)^2$, $(n+9)^2$. Obținem în final 7 numere care sunt insuficiente.
- Dacă $3 \mid (n+2)$, atunci pătratele din șir care dau resturi nenule la împărțirea cu 3 sunt n^2, $(n+1)^2$, $(n+3)^2$, $(n+4)^2$, $(n+6)^2$, $(n+7)^2$, $(n+9)^2$, $(n+10)^2$. Atribuind fiecărui vârf câte unul dintre aceste numere obținem completarea care verifică cerința.

Așadar, doar pentru numerele de forma $n = M_3 + 1$ avem soluții.

Barem:

- Demonstrează că numerele din cele 8 vârfuri au aceeași paritate 1p
- Demonstrează că nu este posibilă o astfel de aranjare 1p

- Justifică faptul că în cele 8 vârfuri trebuiesc puse numere care dau același rest la împărțirea cu 3 ... ... $1p$
- Afirmă că printre 3 pătrate consecutive există două care dau același rest la împărțirea prin 3 ... $1p$
- Analizează cazul $3 \mid n$ ... $1p$
- Analizează cazul $3 \mid n+1$ ... $1p$
- Analizează cazul $3 \mid n+2$ ... $1p$

$\square$

Problema 2

Pe o tablă sunt scrise numerele de la 1 la 100. Ana și Bogdan joacă un joc în care cei doi fac mutări alternativ, prima care mută este Ana. O mutare constă din a alege un număr natural $n > 1$ dintre cele scrise pe tablă, a-l scrie sub forma $a + b$, cu a, b numere naturale nenule, apoi de a șterge de pe tablă numărul $a + b$ și a scrie pe tablă numerele a și b. Jucătorul care nu mai poate muta, pierde. Care dintre copii are strategie de câștig, indiferent de cum va juca celălalt și care este aceasta?

Andrei Eckstein

Demonstrație. Jocul se termină atunci când toate numerele devin egale cu 1. Suma numerelor de pe tablă nu se modifică la o mutare. Inițial, suma numerelor de pe tablă este $1+2+3+...+100 = 5050$. Deci, la sfârșit, pe tablă vor fi 5050 numere toate egale cu 1. Să mai observăm că la fiecare mutare numărul de numere scrise pe tablă crește cu 1. Inițial erau 100 de numere. La final sunt 5050 numere pe tablă, deci s-au efectuat 4950 mutări, adică un număr par. Așadar, ultima mutare a fost făcută de Bogdan și Ana pierde, indiferent de cum mută ea sau Bogdan.

Barem:

- Afirmă că jocul se termină când toate numerele sunt egale cu 1 ... ... $3p$
- Justifică de ce la final vor fi pe tablă 5050 numere egale cu 1 ... ... $1p$
- Demonstrează că numărul de mutări efectuat este par ... $2p$
- Afirmă că Bogdan este câștigătorul ... ... $1p$

$\square$

Problema 3

Determinați numerele naturale $\overline{ab}$ și $\overline{cd}$, știind că $\overline{abcd} = \overline{ab} + \overline{cd}^{\,n}$, unde n este număr natural.

Demonstrație.

- Dacă $n \geq 4$, atunci $\overline{cd}^{\,n} > 10^4 = 10000 > \overline{abcd}$ și problema nu are soluții.
- Dacă $n = 0$ sau $n = 1$, atunci $\overline{ab} + \overline{cd}^{\,n} \leq 99 + 99 < \overline{abcd}$, nici în acest caz nu avem soluții. Așadar, n poate lua doar valorile 2 sau 3.

- Dacă $n = 2$, relația din enunț devine $100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = \overline{ab} + \overline{cd}^{\,2} \iff 99 \cdot \overline{ab} = \overline{cd}(\overline{cd} - 1)$. De aici rezultă că $11 \mid \overline{cd}(\overline{cd} - 1)$, dar 11 este prim și rezultă că $11 \mid \overline{cd}$ sau $11 \mid (\overline{cd} - 1)$. Pe de altă parte, $\overline{cd}$ și $\overline{cd} - 1$ sunt prime între ele pentru că sunt numere consecutive, de unde obținem și că $9 \mid \overline{cd}$ sau $9 \mid (\overline{cd} - 1)$.

  ◦ $11 \mid \overline{cd}$ și $9 \mid (\overline{cd} - 1)$ și obținem soluția $\overline{cd} = 55$ și $\overline{ab} = 30$.
  ◦ $9 \mid \overline{cd}$ și $11 \mid (\overline{cd} - 1)$ și obținem soluția $\overline{cd} = 45$ și $\overline{ab} = 20$.
  ◦ $99 \mid \overline{cd}$ sau $99 \mid (\overline{cd} - 1)$ și obținem soluțiile $\overline{cd} = 99$ și $\overline{ab} = 98$.

- Dacă $n = 3$, analog ca mai sus, se obține relația $99 \cdot \overline{ab} = \overline{cd}(\overline{cd}^{\,2} - 1)$ și avem de studiat aceleași cazuri ca mai sus.
  Să mai observăm mai întâi că $99 \cdot \overline{ab} \leq 100 \cdot 100 = 10000$ și, pentru $\overline{cd} \geq 22$ obținem că $\overline{cd}(\overline{cd}^{\,2} - 1) \geq 10626$. Deci $\overline{cd} \leq 21$.

  ◦ Dacă $9 \mid \overline{cd}$ și $11 \mid \overline{cd}^{\,2} - 1$, atunci $\overline{cd} = 18$, dar nu verifică a doua condiție, deci nu avem soluții.
  ◦ Dacă $11 \mid \overline{cd}$ și $9 \mid \overline{cd}^{\,2} - 1$, atunci $\overline{cd} = 11$, dar nu verifică a doua condiție, deci nu avem soluții.
  ◦ Dacă $99 \mid \overline{cd}$ obținem $\overline{cd} = 99$ și nu avem soluții.
  ◦ Dacă $99 \mid (\overline{cd}^{\,2} - 1)$, atunci $\overline{cd}$ dă restul 1 sau 10 la împărțirea cu 11. Singura soluție este $\overline{cd} = 10$ și $\overline{ab} = 10$.

Soluțiile problemei sunt $(\overline{ab}, \overline{cd}, n) \in \{(30, 55, 2), (20, 45, 2), (98, 99, 2), (10, 10, 3)\}$.

Barem:

- Elimină cazurile $n = 0$, $n = 1$ și $n \geq 4$ 1*p*
- Obține $99 \cdot \overline{ab} = \overline{cd}(\overline{cd} - 1)$ 1*p*
- Rezolvă complet cazul $n = 2$ 2*p*
- Rezolvă complet cazul $n = 3$ și $9 \mid \overline{cd}$, $11 \mid \overline{cd}$ 2*p*
- Rezolvă cazul $99 \mid (\overline{cd}^{\,2} - 1)$ 1*p*

□

Problema 4

Unele dintre cele 2022 cutii mari din cămară conțin câte 338 cutii medii fiecare. Unele dintre cutiile medii conțin câte 338 cutii mici fiecare. Dacă există 5392 cutii goale, câte cutii sunt în total?

Demonstrație. Cutiile pot fi umplute pe rând, una câte una, nu se modifică esența problemei. Inițial sunt 2022 cutii mari goale. O umplem pe prima dintre ele. Cutia mare care a fost umplută cu cutii medii nu se mai numără la cele goale, dar avem 338 noi cutii goale. Adică, numărul cutiilor goale a crescut cu 337. La fiecare operație de umplere a unei cutii, numărul cutiilor goale crește cu 337, iar la final vor fi $2022 + 337k$ cutii goale, unde k reprezintă numărul de operații de umplere a unei cutii goale. Cum $5392 = 2022 + 337 \cdot 10$, obținem $k = 10$ și numărul total de cutii este $5392 + 10 = \boxed{5402}$.

Barem:

- Justifică de ce numărul de cutii crește cu 337 de fiecare dată 2*p*

- Afirmă că după k operații sunt $2022 + 337k$ cutii goale . . . . $2p$
- Determină $k = 10$ . . . . $2p$
- Obține numărul de cutii egal cu 5402 . . . . $1p$

$\square$

Problemele 1-4: . . . . $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: . . . . $0p$
Total: . . . . $28p$

Timp de lucru: . . . . 3 ore