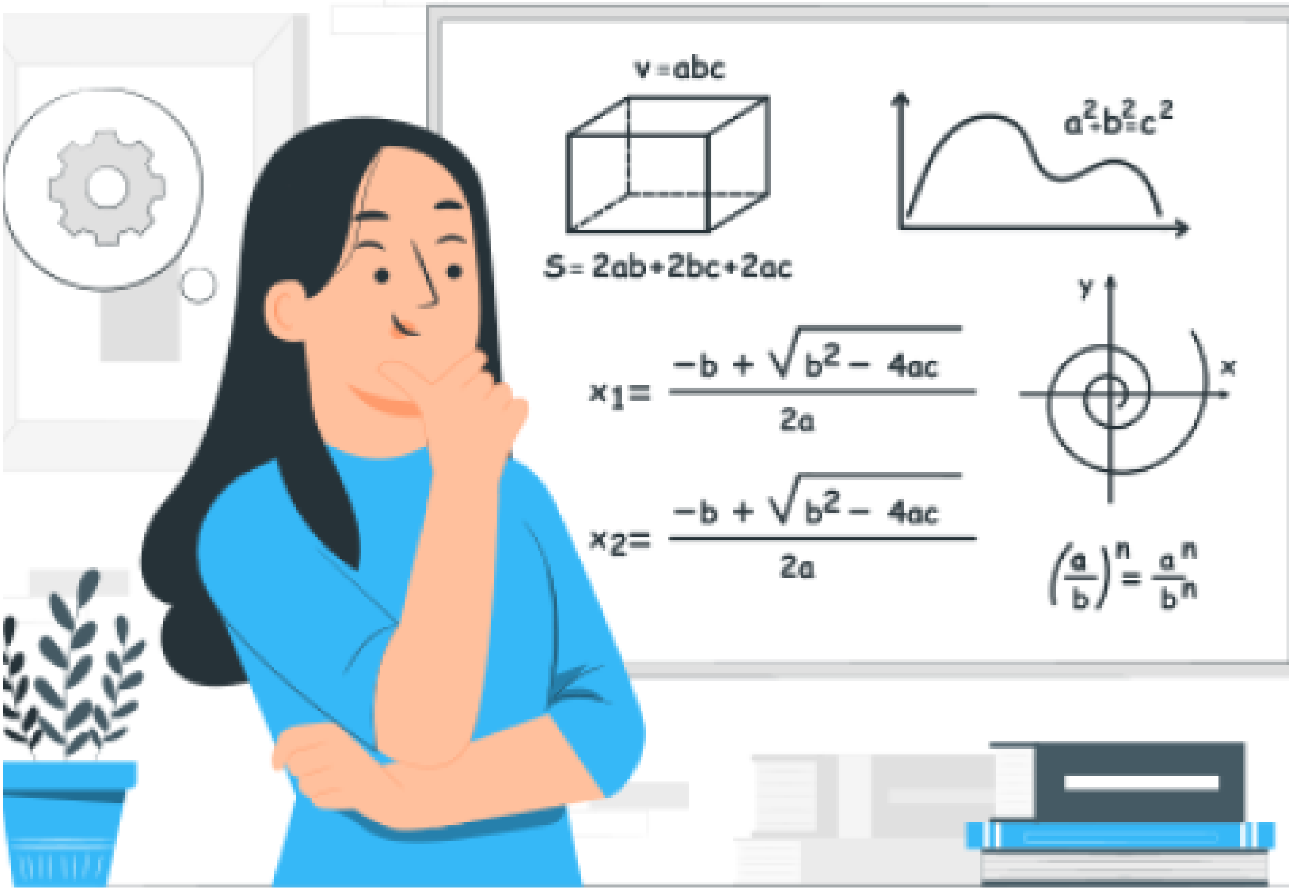


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022

Etapa III
Clasa a VI-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

a) Determinați numerele naturale m pentru care numerele 2^{m+1} și 5^m sunt consecutive.

b) Spunem despre un număr natural n că este *sumabil* dacă are cel puțin două cifre și se poate scrie ca suma unor numere naturale consecutive, cel mai mic dintre aceste numere naturale consecutive fiind egal cu suma cifrelor numărului n. Care este cel mai mare număr *sumabil*, care are suma cifrelor 1?

Demonstrație.

a) Pentru $m \geq 2$ avem $5^m = 25 \cdot 5^{m-2} \geq 25 \cdot 2^{m-2} > 8 \cdot 2^{m-2} + 1 = 2^{m+1} + 1$, deci 5^m și 2^{m+1} nu pot fi numere consecutive.
Pentru $m = 1$ găsim soluție, numerele $4 = 2^2$ și 5 sunt consecutive. Pentru $m = 0$ avem soluție, numerele $5^0 = 1$ și 2 sunt consecutive.

Soluție alternativă.
Pentru $m = 0$ numerele sunt $2^1 = 2$ și $5^0 = 1$, care sunt consecutive.
Este evident că pentru $m > 0$ cel mai mare dintre numere este 5^m. Dacă $2^{m+1} = a$ și $5^m = a + 1$, atunci $5^m = 2^{m+1} + 1$.

- Dacă m este număr par nenul, atunci $5^m = (6-1)^m = \mathcal{M}_3 + 1$ și $2^{m+1} + 1 = (3-1)^{m+1} + 1 = \mathcal{M}_3 - 1 + 1 = \mathcal{M}_3$. Cum numerele dau resturi diferite la împărțirea prin 3, nu există soluție în acest caz.
- Dacă $m = 1$, atunci $2^{m+1} = 2^2 = 4$ și $5^m = 5^1 = 5$, care sunt soluții.
- Dacă m este număr impar mai mare sau egal cu 3, atunci $5^m = 5^{2k+1} = 25^k \cdot 5 = 5 \cdot (24+1)^m = 5 \cdot (\mathcal{M}_8 + 1) = \mathcal{M}_8 + 5$ și $2^{m+1} + 1 = \mathcal{M}_8 + 1$. Cum numerele dau resturi diferite la împărțirea prin 8, nu există soluție în acest caz.

Soluțiile sunt $m = 0$ și $m = 1$.

b) Numerele naturale de cel puțin două cifre pentru care suma cifrelor este 1 sunt de forma 10^m, $m \in \mathbb{N}^*$. Dacă 10^m este un număr *sumabil*, atunci există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $10^m = 1 + 2 + 3 + ... + n \iff 10^m = \dfrac{n(n+1)}{2} \iff 10^m \cdot 2 = n(n+1) \iff 2^{m+1} \cdot 5^m = n(n+1)$. Cum n și $n+1$ sunt numere prime între ele, rezultă că $n = 2^{m+1}$ și $n + 1 = 5^m$ sau invers.
Pentru $m \geq 2$ am demonstrat la punctul anterior că nu avem soluții. Rămâne unicul caz $m = 1$ pentru care $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, deci singurul număr *sumabil* cu suma cifrelor egală cu 1 este 10.

Barem:

- Demonstrează că pentru $m \geq 2$ nu se obțin soluții 2*p*
- Obține soluțiile $m = 0$ și $m = 1$ 1*p*
- Afirmă că singurele numere cu suma cifrelor 1 sunt cele de forma 10^n 1*p*
- Obține $2^{m+1} \cdot 5^m = n(n+1)$. 1*p*
- Justifică $n = 2^{m+1}$ și $n + 1 = 5^m$ sau invers 1*p*

- Obține soluția unică 10 . . . . 1p

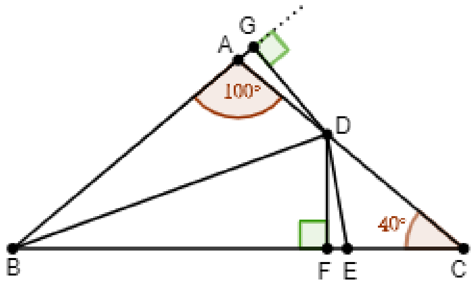
□

Problema 2

În triunghiul isoscel $\triangle ABC$ știm că $m(\angle BAC) = 100°$. Fie $(BD$ bisectoarea unghiului $\angle ABC$, $D \in (AC)$. Dacă perimetrul triunghiului $\triangle ABD$ este egal cu m și perimetrul triunghiului $\triangle ABC$ este n, determinați lungimea laturii (BC) în funcție de m și n.

Mihaela Berindeanu

Demonstrație. Triunghiul $\triangle ABC$ este isoscel și obtuzunghic $\implies$ $(AB) \equiv (AC)$ și $\angle ABC \equiv \angle ACB$.
În $\triangle ABC$ știm că $m(\angle ABC) + m(\angle BCA) + m(\angle CAB) = 180° \iff m(\angle BCA) = m(\angle CBA) = 40°$.
Cum $(BD$ este bisectoarea unghiului $\angle ABC$ obținem că $m(\angle DBC) = \dfrac{m(\angle ABC)}{2} = 20°$.
Considerăm $E \in (BC)$ astfel încât $(BD) \equiv (BE)$. În $\triangle BDE$ avem $m(\angle DBE) + m(\angle BDE) + m(\angle BED) = 180° \implies m(\angle BED) = 80°$.



Construim $DF \perp BC$, $F \in BC$ și $DG \perp AB$, $G \in AB$. Punctul D aparține bisectoarei unghiului $\angle ABC$ și este egal depărtat de laturile unghiului, adică $(DF) \equiv (DG)$. (**1**)
Din teorema unghiului exterior obținem că $m(\angle GAD) = m\angle ABC) + m(\angle ACB) = 80°$. (**2**)
Din (**1**) și (**2**) și pentru că $\angle DFE$ și $\angle DGA$ sunt unghiuri drepte obținem că $\triangle DFE \equiv \triangle DGA$ în cazul de congruență CU. De aici obținem $(AD) \equiv (DE)$. (**3**)
Triunghiul $\triangle DEC$ este isoscel pentru că $m(\angle DEC) = 180° - m(\angle DEB) = 100°$. În $\triangle DEC$ $m(\angle EDC) = 180° - m(\angle DEC) - m(\angle DCE) = 40° \implies \angle EDC \equiv \angle ECD \implies (DE) \equiv (EC)$. (**4**)
Din (**3**) și (**4**) și din construcția punctului E obținem $BC = BE + EC = BD + DE = BD + AD$.
$\mathcal{P}_{ABC} - \mathcal{P}_{ABD} = AB + BC + CA - AB - BD - AD = BC + CA - BD - AD = BD + AD + CA - BD - AD = CA$. Deci $AC = AB = n - m$. Pe de altă parte, $BC = \mathcal{P}_{ABC} - AB - AC = n - 2(n - m) = 2m - n$.

Barem:

- Determină $m(\angle DBC) = 20°$ 1p
- Construiește $E \in (BC)$ cu $(BD) \equiv (BE)$ 2p
- Construiește $DF \perp BC$ și $DG \perp AB$ 2p
- Obține $BC = BD + AD$ 1p
- Obține $BC = 2m - n$ 1p

□

Problema 3

La intrarea în Muzeul de Artă din Helsinki sunt aliniate 10 perechi de papuci pe care trebuie să îi încalțe vizitatorii, nefiind permis accesul cu încălțămintea care a fost purtată în exterior pentru a proteja podeaua din piatră veche și parchetul. Tocmai a sosit un grup de 5 matematicieni și ghidul a privit cu stupoare la dezordinea care era printre papuci, gândindu-se că va dura mult până când fiecare vizitator își va găsi un papuc stâng și unul drept. Însă, unul dintre matematicieni l-a asigurat că, oricum ar fi așezați papucii, se pot găsi 10 consecutivi, astfel încât numărul papucilor pentru piciorul stâng să fie egal cu numărul papucilor pentru piciorul drept. Demonstrați că matematicianul are dreptate.

Demonstraţie. Numerotăm papucii de la 1 la 20 și îi împărțim în 2 grupe:

- Grupa I: Primii 10 papuci, cei de la poziția 1 la poziția 10. Notăm cu s_1 numărul de papuci pentru piciorul stâng din această grupă și cu d_1 numărul de papuci pentru piciorul drept din această grupă.
- Grupa II: Ultimii 10 papuci, cei de la poziția 11 la poziția 20. Notăm cu s_2 numărul de papuci pentru piciorul stâng din această grupă și cu d_2 numărul de papuci pentru piciorul drept din această grupă.

Facem pentru început următoarele observații:

- $s_1 + s_2 = d_1 + d_2 = 10$.
- $s_1 + d_1 = 10 \Longrightarrow d_1 = 10 - s_1$.
- $s_2 + d_2 = 10 \Longrightarrow d_2 = 10 - s_2$.

Analizăm următoarele cazuri:

- Cazul I: $s_1 = d_1$. Atunci problema este rezolvată întrucât am găsit 10 papuci consecutivi cu numărul papucilor pentru piciorul stâng egal cu numărul papucilor pentru piciorul drept.
- Cazul II: $s_1 > d_1$. Vom demonstra că în grupa a II-a numărul papucilor pentru piciorul stâng este strict mai mic decât numărul papucilor pentru piciorul drept, adică $s_2 < d_2$. Într-adevăr, dacă $s_2 \geq d_2$ atunci $s_1 + s_2 > d_1 + d_2$, ceea ce reprezintă o contradicție. Așadar, pentru grupa a II-a, diferența dintre numărul papucilor pentru piciorul stâng și numărul papucilor pentru piciorul drept este negativă, adică $s_2 - d_2 < 0$. $\quad (\mathbf{1})$

  În continuare, ideea este să ne mutăm, cu câte un papuc, de-a lungul liniei de papuci. Plecăm de la grupa $\{1, 2, ..., 10\}$ și trecem succesiv prin următoarele grupe $\{2, 3, ..., 11\}$, $\{3, 4, ..., 12\}$, ..., $\{10, 11, ..., 19\}$ și ajungem în final la $\{11, 12, ..., 20\}$.

  La fiecare dintre aceste grupe prin care trecem ne uităm la diferența dintre numărul papucilor pentru piciorul stâng și numărul papucilor pentru piciorul drept. Inițial diferența este $s_1 - d_1 = s_1 - (10 - s_1) = 2s_1 - 10$ care este un număr par strict pozitiv, întrucât $s_1 > d_1$. La fiecare trecere, de la o grupă la alta, observăm că:
  ◦ diferența rămâne constantă (papucul care iese din grupă este de același tip cu papucul care intră în noua grupă).
  ◦ crește sau scade cu 2 (papucul care iese din grupă este de un alt tip față de papucul care intră în noua grupă).

Așadar, plecăm cu o diferență pozitivă pară, apoi succesiv adunăm sau scădem 2, și conform (**1**) ajungem în final la o diferență negativă. Prin urmare, de-a lungul tranzițiilor, trebuia să fie o grupă cu diferența 0. În acea grupă numărul papucilor pentru piciorul stâng este egal cu numărul papucilor pentru piciorul drept și problema este rezolvată.

- Cazul III: $s_1 < d_1$. Se demonstrează similar ca și cazul II.

Barem:

- Împarte papucii în două grupe de câte 10 .... $1p$
- Analizează cazul $s_1 = d_1$ .... $1p$
- Demonstrează că $s_1 > d_1 \implies s_2 < d_2$ .... $1p$
- Obține $s_1 - d_1 = 2s_1 - 10$ .... $1p$
- Analizează modificarea diferenței $s_1 - d_1$ .... $1p$
- Argumentează existența unei grupe cu număr egal de papuci stângi și drepți .... $2p$

□

Problema 4

Care este cel mai mare număr natural mai mic decât 2022 care se poate scrie ca suma a 4 divizori diferiți ai lui?

Andrei Bâra

Demonstrație. Să observăm pentru început că, dacă d este un divizor al lui n, atunci și $\frac{n}{d}$ este divizor al lui n. Este evident din scrierea $n = d \cdot \frac{n}{d}$.

Fie $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ cei 4 divizori care au suma egală cu n. Atunci $d_1 = \frac{n}{d}$, $d_2 = \frac{n}{c}$, $d_3 = \frac{n}{b}$, $d_4 = \frac{n}{a}$, unde $1 < a < b < c < d$ sunt și ei divizori ai lui n. Obținem:

$$n = \frac{n}{a} + \frac{n}{b} + \frac{n}{c} + \frac{n}{d} \iff \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1.$$

Dacă $a \geq 3$, atunci $b \geq 4$, $c \geq 5$, $d \geq 6$ de unde rezultă:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60} < 1.$$

Obținem o contradicție și întrucât $a \neq 1$ rezultă $a = 2$ și atunci $b \geq 3$.

- Dacă $b \geq 6$, atunci $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{73}{168} < \frac{1}{2}$, contradicție.

- Dacă $b = 5$, atunci $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{3}{10} \iff 3cd = 10(c + d) \iff (3c - 10)(3d - 10) = 100$, ecuație ce nu are soluții pentru $c \geq 6$, $d \geq 7$.

- Dacă $b = 4$, atunci $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{4} \iff cd = 4(c + d) \iff (c - 4)(d - 4) = 16$. Se găsesc soluțiile $(c, d) \in \{(5, 20), (6, 12)\}$.
  Astfel, avem că $2, 4, 5, 20 |\ n$ sau $2, 4, 6, 12 |\ n \Rightarrow 2^2 \cdot 5 |\ n$ sau $2^2 \cdot 3 |\ n$.

- Dacă $b = 3$, atunci $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{6} \iff cd = 6(c+d) \iff (c-6)(d-6) = 36$, de unde se găsesc soluțiile $(c,d) \in \{(7,42), (8,24), (9,18), (10,15)\}$.
  Rezultă că $2 \cdot 3 \cdot 7 | \ n$ sau $2^3 \cdot 3 | \ n$ sau $2 \cdot 3^2 | \ n$ sau $2 \cdot 3 \cdot 5 | \ n$.

Se obține că $n \in \mathcal{M}_{12} \cup \mathcal{M}_{20} \cup \mathcal{M}_{42} \cup \mathcal{M}_{18} \cup \mathcal{M}_{30}$.
Cel mai mare număr care face parte din această mulțime este 2020, care este divizibil cu 20 și $2020 = 1010 + 505 + 404 + 101$.

Barem:

- Afirmă că $d \mid n \implies \frac{n}{d} \mid n$ .... $1p$
- Scrie ecuația $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$. .... $1p$
- Demonstrează că $a = 2$ și $b \leq 5$ .... $1p$
- Analizează cazul $b = 5$ .... $1p$
- Obține $2^2 \cdot 5 \mid n$ sau $2^2 \cdot \mid n$ .... $1p$
- Obține $2 \cdot 3 \cdot 7 \mid n$ sau $2^3 \cdot 3 \mid n$ sau $2 \cdot 3^2 \mid n$ sau $2 \cdot 3 \cdot 5 \mid n$. .... $1p$
- Determină soluția $n = 2020$ și scrie $n = 1010 + 505 + 404 + 101$ .... $1p$

$\square$

Problemele 1-4: .... $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: .... $0p$
Total: .... $28p$

Timp de lucru: .... 3 ore