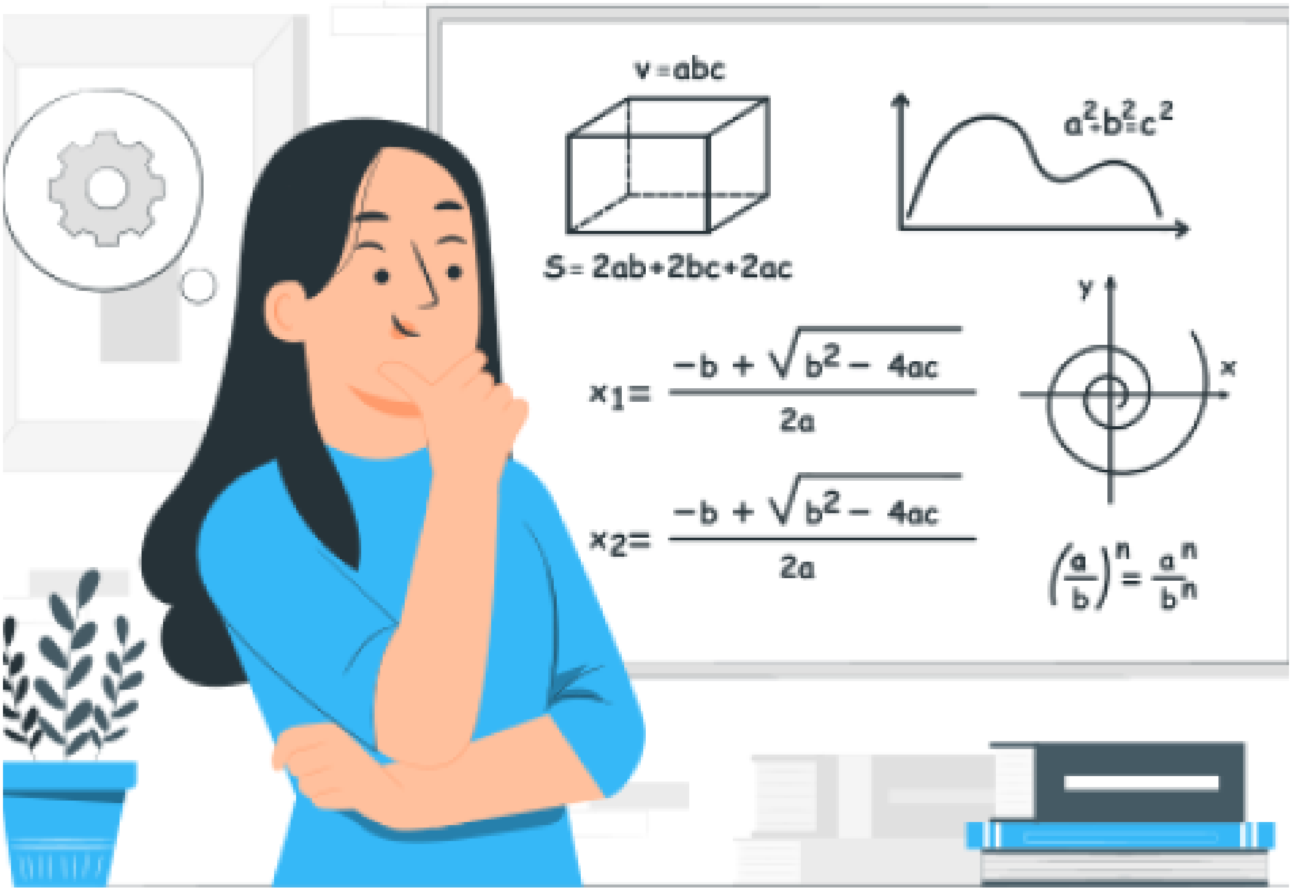


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022

Etapa III
Clasa a VII-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

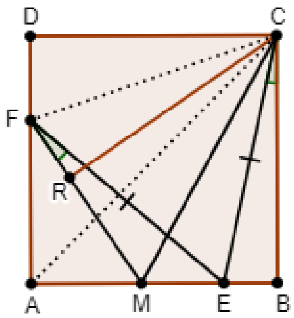
§1 Soluții

Problema 1

Considerăm $ABCD$ un pătrat. Fie punctul E pe latura (AB) și fie punctul F pe latura (AD) astfel încât $CE = EF$. Considerăm punctul M pe segmentul (AE) cu proprietatea că $m(\angle EFM) = m(\angle BCE)$. Să se arate că măsura unghiului $\angle BCM$ este egală cu jumătate din măsura unghiului $\angle AMF$.

Dinu Șerbănescu

Demonstrație. $(EF) \equiv (EC) \implies \triangle EFC$ este isoscel și $m(\angle EFC) = m(\angle ECF)$.
Să observăm că $m(\angle MFC) = m(\angle MFE) + m(\angle EFC) = m(\angle ECF) + m(\angle ECB) = m(\angle FCB)$.
În plus, $\angle FCB \equiv \angle CFD$ pentru că sunt complementele unghiului $\angle FCD$, prin urmare $(FC$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\angle MFA$. Deoarece $(AC$ este bisectoarea interioară a unghiului $\angle FAM$ și $(FC$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\angle AFM$, deducem că C este A-excentrul triunghiului AFM, deci distanța de la C la dreapta MF este egală cu lungimea laturii pătratului.



Fie R proiecția punctului C pe dreapta FM. Cum $(CR) \equiv (CB)$, (CM) este latura comun și triunghiurile $\triangle MCR$ și $\triangle MCB$ sunt dreptunghice, obținem că $\triangle MCR \equiv \triangle MCB \implies \angle MCR \equiv \angle MCB$.
Patrulaterul $MBCR$ este inscriptibil pentru că $m(\angle MRC) + m(\angle MBC) = 180°$, și diametrul cercului circumscris este CM. Rezultă că $\angle AMF \equiv \angle BCR$, de unde $m(\angle AMF) = m(\angle BCR) = 2 \cdot m(\angle MCB)$, ceea ce trebuia demonstrat.

Barem:

- Demonstrează că $(FC$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\angle MFA$ . . . . $2p$
- Demonstrează că $d(C, MF) = BC$ . . . . $1p$
- Demonstrează că $\angle MCR \equiv \angle MCB$ . . . . $2p$
- Demonstrează că $\angle AMF \equiv \angle BCR$ . . . . $1p$
- Obține $m(\angle AMF) = 2 \cdot m(\angle MCB)$ . . . . $1p$

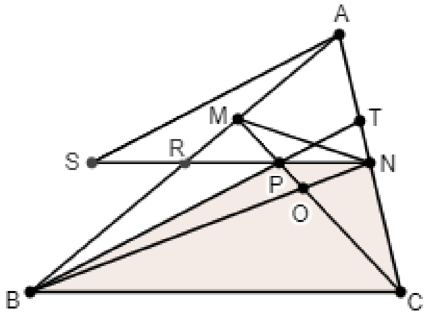
□

Problema 2

În triunghiul ascuțitunghic $\triangle ABC$ considerăm punctele $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$, astfel încât $AM = AN$. Fie $\{O\} = BN \cap CM$. Dacă $(BO) \equiv (CO)$, atunci triunghiul $\triangle ABC$ este isoscel.

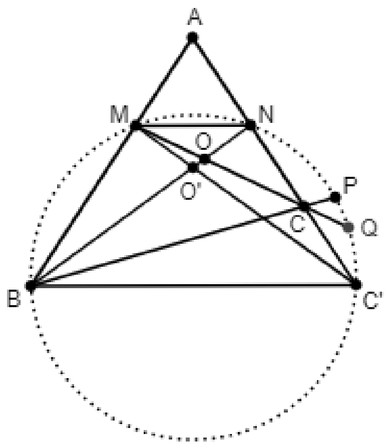
Marius Mînea

Demonstrație. Vom aplica metoda reducerii la absurd. Presupunem că $\triangle ABC$ nu este isoscel, deci $AB \neq AC$. Fără a restrânge generalitatea problemei, vom alege că $AB > AC$, de unde obținem că $m(\angle ACB) > m(\angle ABC)$.



Construim $NR \parallel BC$, $R \in (AB)$. Vom demonstra că $R \in (BM)$. Din $RN \parallel BC \implies \angle ANR \equiv \angle ACB$ (corespondente), $\angle ARN \equiv \angle ABC$ (corespondente) și cum $m(\angle ACB) > m(\angle ABC) \implies AR > AN$. Dar $AM = AN \implies AR > AM$, deci $M \in (AR)$.
Fie $NR \cap MC = \{P\}$ si $BP \cap AC = \{T\}$. Vom demonstra că $BCNP$ este trapez isoscel. Știm că $\triangle OBC$ este isoscel cu $OB = OC \implies \angle OBC \equiv \angle OCB$. Pe de altă parte, $\angle BCO \equiv \angle OPN$ și $\angle CBO \equiv \angle PNO$, fiind perechi de unghiuri alterne interne. De aici rezultă că $\angle OPN \equiv \angle ONP \implies \triangle ONP$ este isoscel cu $\angle OPN \equiv \angle ONP$. Atunci $BN = BO + ON = CO + OP = CP$, deci trapezul $BCNP$ are diagonalele congruente, de unde obținem că este isoscel de baze (BC) si $(NP) \implies \angle BPN \equiv \angle CNP \implies \angle TPN \equiv \angle TNP \implies$. **(1)**
Construim $AS \parallel BP$, $S \in NR$. Atunci, $\angle ASN \equiv \angle TPN$ **(2)** (unghiuri corespondente). Din **(1)** si **(2)** obținem $\angle ASN \equiv \angle ANS$, adică $\triangle ASN$ este isoscel cu $(AS) \equiv (AN)$. Dar $(AM) \equiv (AN) \implies (AS) \equiv (AM)$. Triunghiul $\triangle ASR$ este obtuzunghic cu $m(\angle ARS) > 90°$ pentru că $\angle ARS \equiv \angle BRN$, fiind unghiuri opuse la vârf, iar cel din urmă este obtuz ca unghi alăturat bazei mici în trapezul $BCNR$, de unde $AS > AR > AM$ și am obținut astfel o contradicție. Presupunerea făcută este falsă, deci triunghiul $\triangle ABC$ este isoscel.

Demonstrație alternativă. Vom aplica metoda reducerii la absurd. Presupunem că $\triangle ABC$ nu este isoscel, deci $AB \neq AC$. Fără a restrânge generalitatea problemei, vom alege ca $AB > AC$. Atunci $MN \nparallel BC$.



Ducem $BC' \parallel MN$, $C' \in (AC$. Vom demonstra că $C \in (AC')$. Din $MN \parallel BC'$ și $(AM) \equiv (AN)$ obținem că $\triangle ABC'$ este isoscel. Așadar, $AB = AC'$ și deoarece $AB > AC \implies AC' > AC$, deci $C \in (AC')$. Fie $MC' \cap BN = \{O'\}$. Pe de altă parte, $MNC'B$ este patrulater inscriptibil deoarece este trapez isoscel. Fie $BC \cap \mathcal{C}_{MNC'B} = \{P\}$ și $MC \cap \mathcal{C}_{MNC'B} = \{Q\}$. Atunci:

$$m(\angle OCB) = m(\angle MCB) = \frac{m(\overset{\frown}{\mathrm{MB}}) + m(\overset{\frown}{\mathrm{QP}})}{2} >$$

$$> \frac{m(\overset{\frown}{\mathrm{MB}})}{2} = m(\angle MC'B) = m(\angle OBC') > m(\angle OBC).$$

Am obținut $m(\angle OCB) > m(\angle OBC)$, contradicție cu $\triangle OBC$ isoscel. Presupunerea făcută este falsă, deci triunghiul $\triangle ABC$ este isoscel.

Barem:

- Construiește $NR \parallel BC$, $R \in (AB)$ ... 1p
- Demonstrează că $R \in (BM)$ ... 1p
- Demonstrează $BCNP$ trapez isoscel ... 1p
- Construiește $AS \parallel BP$ ... 1p
- Obține $(AS) \equiv (AM)$ ... 1p
- Justifică $m(\angle ARS) > 90°$ ... 1p
- Finalizează ... 1p

□

Problema 3

Notăm cu $\tau(k)$ numărul tuturor divizorilor (pozitivi) ai numărului natural k. Aflați cel mai mic număr natural n astfel încât cel mai mare divizor comun al lui $\tau(n)$ și al lui $\tau(n^3)$ nu este o putere a lui 2.

Se știe că, dacă descompunerea în factori primi a unui număr natural n este $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$, unde $p_1 < p_2 < ... < p_n$, atunci numărul de divizori este egal cu $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_k + 1)$.

Demonstrație. Fie $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k} \implies n^3 = p_1^{3\alpha_1} \cdot p_2^{3\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{3\alpha_k}$. Avem următoarele relații:

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_k + 1)$$

$$\tau(n^3) = (3\alpha_1 + 1) \cdot (3\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (3\alpha_k + 1)$$

Atunci $(\tau(n), \tau(n^3)) \neq 2^k \iff \exists p,\ p \geq 3,\ p$ prim, astfel încât $p \mid \tau(n)$ și $p \mid \tau(n^3)$, adică:

$$p \mid (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_k + 1)$$

$$p \mid (3\alpha_1 + 1) \cdot (3\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (3\alpha_k + 1)$$

Întrucât $(3\alpha_1 + 1) \cdot (3\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (3\alpha_k + 1)$ este $M_3 + 1 \implies p \neq 3$. Analizăm în continuare următoarele cazuri:

- Cazul I: $p = 5$.

$$5 \mid (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_k + 1) \Longrightarrow \exists i \in \{1, ..., k\},\ 5 \mid (\alpha_i + 1)$$

$$5 \mid (3\alpha_1 + 1) \cdot (3\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (3\alpha_k + 1) \Longrightarrow \exists j \in \{1, ..., k\},\ 5 \mid (3\alpha_j + 1)$$

Din $5 \mid (\alpha_i + 1) \Longrightarrow \alpha_i + 1 = M_5 \Longrightarrow \alpha_i = M_5 - 1 = M_5 + 4$. (**1**)
Din $5 \mid (3\alpha_j + 1) \Longrightarrow 3\alpha_j + 1 = M_5 \Longrightarrow 6\alpha_j + 2 = M_5 \Longrightarrow 6\alpha_j = M_5 - 2 = M_5 + 3 \Longrightarrow \alpha_j + 5\alpha_j = M_5 + 3 \Longrightarrow \alpha_j = M_5 + 3$. (**2**)
Din (**1**) și (**2**) $\Longrightarrow i \neq j$. Dar $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k} \Longrightarrow n \geq p_i^{\alpha_i} \cdot p_j^{\alpha_j} \Longrightarrow \boxed{n \geq 2^4 \cdot 3^3}$.

- Cazul II: $p = 7$.

$$7 \mid (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_k + 1) \Longrightarrow \exists i \in \{1, ..., k\},\ 7 \mid (\alpha_i + 1)$$

$$7 \mid (3\alpha_1 + 1) \cdot (3\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (3\alpha_k + 1) \Longrightarrow \exists j \in \{1, ..., k\},\ 7 \mid (3\alpha_j + 1)$$

Din $7 \mid (\alpha_i + 1) \Longrightarrow \alpha_i + 1 = M_7 \Longrightarrow \alpha_i = M_7 - 1 = M_7 + 6$. (**3**)
Din $7 \mid (3\alpha_j + 1) \Longrightarrow 3\alpha_j + 1 = M_7 \Longrightarrow 6\alpha_j + 2 = M_7 \Longrightarrow 7\alpha_j - \alpha_j + 2 = M_7 \Longrightarrow M_7 - \alpha_j + 2 = M_7 \Longrightarrow \alpha_j = M_7 + 2$. (**4**)
Din (**3**) și (**4**) $\Longrightarrow i \neq j$. Dar $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k} \Longrightarrow n \geq p_i^{\alpha_i} \cdot p_j^{\alpha_j} \Longrightarrow \boxed{n \geq 2^6 \cdot 3^2}$.

- Cazul III: $p \geq 11$.

$$11 \mid (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_k + 1) \Longrightarrow \exists i \in \{1, ..., k\},\ 11 \mid (\alpha_i + 1)$$

Din $11 \mid (\alpha_i + 1) \Longrightarrow \alpha_i + 1 = M_{11} \Longrightarrow \alpha_i = M_{11} - 1 = M_{11} + 10$. Dar $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k} \Longrightarrow n \geq p_i^{\alpha_i} \Longrightarrow \boxed{n \geq 2^{10}}$.

Deoarece $2^{10} > 2^6 \cdot 3^2 > 2^4 \cdot 3^3$, obținem $n \geq 2^4 \cdot 3^3$ în toate cazurile. Verificăm dacă $n = 2^4 \cdot 3^3$ satisface cerințele problemei:

$$\tau(2^4 \cdot 3^3) = (4 + 1) \cdot (3 + 1) = 20$$

$$\tau((2^4 \cdot 3^3)^3) = \tau(2^{12} \cdot 3^9) = (12 + 1) \cdot (9 + 1) = 130$$

$$(20, 130) = 10 \neq 2^\alpha$$

Așadar cel mai mic număr cu proprietatea căutată este $\boxed{n = 2^4 \cdot 3^3}$.

Barem:

- Demonstrează că 3 nu este divizor comun pentru $\tau(n)$ și $\tau(n^3)$ ... 1*p*
- Obține $n \geq 2^4 \cdot 3^3$ pentru $p = 5$ ... 1*p*
- Obține $n \geq 2^6 \cdot 3^2$ pentru $p = 7$ ... 1*p*
- Obține $n \geq 2^{10}$ pentru $p \geq 11$ ... 2*p*
- Demonstrează că $n = 2^4 \cdot 3^3$ este valoarea minimă ... 1*p*
- Demonstrează că $n = 2^4 \cdot 3^3$ verifică condițiile cerute ... 1*p*

$\square$

Problema 4

Vom numi *secvență de lungime* n un n-uplu de numere naturale nenule, nu neapărat distincte, cu suma $2S$. Vom numi **separator** al *secvenței de lungime* n un număr natural k dacă putem alege k dintre cele n numere din *secvență* care să aibă suma egală cu S.

a) Câte numere **separatoare** are *secvența* $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2$?

b) Care este numărul maxim de numere **separatoare** pe care le poate avea o *secvență de lungime* n convenabil aleasă.

Demonstrație.

a) În acest caz $2S = 8$, deci vom căuta numere cu suma 4.

- $k = 1$ nu este separator;
- $k = 2$ este separator cu alegerea $2,\ 2$;
- $k = 3$ este separator cu alegerea $1,\ 1,\ 2$;
- $k = 4$ este separator cu alegerea $1,\ 1,\ 1,\ 1$;
- $k = 5$ și $k = 6$ nu sunt separatori pentru că suma celor mai mici 5 numere din *secvență* depășește S.

b) Pentru început facem următoarele observații:

- Dacă k este separator, atunci și $n - k$ este separator.
- Dacă 1 este separator, atunci doar 1 și $n - 1$ sunt separatori. $\quad$ (**1**)

Analizăm următoarele cazuri:

- Dacă $n = 1$ nu putem avea niciun separator.
- Dacă $n = 2$, doar 1 poate fi separator, când numerele sunt egale.
- Dacă $n = 3$, doar 1 și 2 pot fi separatori, ca în cazul numerelor 1, 2, 3 $(1 + 2 = 3)$.
- Dacă $n = 4$, putem avea cel mult doi separatori, din argumentul (**1**), ca în cazul numerelor 1, 2, 3, 6 $(1 + 2 + 3 = 6)$.
- Dacă $n \geq 5$, vom arăta că pentru o secvență convenabil aleasă numărul maxim de separatori este $n - 3$ și aceștia vor fi:

$$2, 3, 4, \ldots, n - 2.$$

Deoarece 1 și $n - 1$ pot fi separatori doar atunci când sunt unicii separatori și cum $n - 3 \geq 2$ pentru $n \geq 5$, rămâne doar de oferit un exemplu.

∘ Pentru $n = 2k$ putem alege numerele

$$1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, \ldots, 2^{k-2}, 2^{k-2},$$

pentru care $2S = 2^k$, deci $S = 2^{k-1}$. Avem

$$S = 2^{k-2} + 2^{k-2} = 2^{k-2} + 2^{k-3} + 2^{k-3} = \cdots = 2^{k-2} + 2^{k-3} + \cdots + 2 + 1 + 1.$$

∘ Pentru $n = 2k + 1$ putem alege numerele

$$1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, \ldots, 2^{k-1}, 2^{k-1},$$

pentru care $2S = 2^{k+1}$, deci $S = 2^k$. Avem

$$S = 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-2} = \cdots = 2^{k-2} + 2^{k-3} + \cdots + 2 + 1 + 1.$$

Astfel, numărul maxim posibil de numere separatoare este:

- niciunul pentru $n = 1$,
- unul pentru $n = 2$,
- doi pentru $n = 3$ și $n = 4$
- $n - 3$ pentru $n \geq 5$.

Barem:

- Demonstrează că **separatorii** *secvenței* sunt 2, 3 și 4 . . . . 1p
- Afirmă că, dacă k este **separator,** atunci și $n - k$ este **separator** 1p
- Analizează cazurile $n \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 1p
- Găsește exemplu pentru $n \geq 5$, n par 2p
- Găsește exemplu pentru $n \geq 5$, n impar 2p

□

Problemele 1-4: . . . . $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: . . . . $0p$
Total: . . . . $28p$

Timp de lucru: . . . . 4 ore