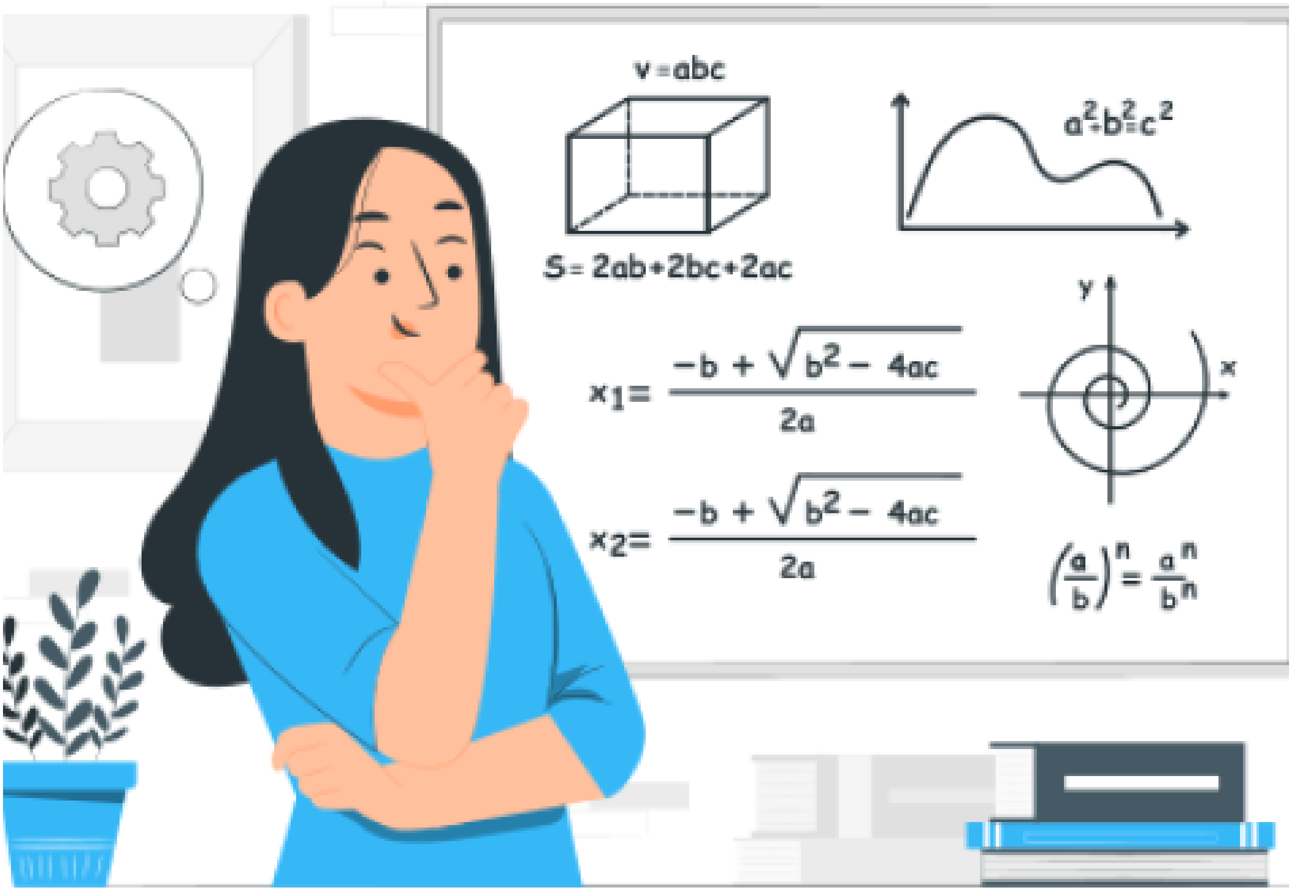


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022

Etapa III
Clasa a VIII-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Fie a, b, c numere reale pozitive, astfel încât $a+b+c=6$. Demonstrați că are loc inegalitatea

$$(10-a)(10-b)(10-c) \geq \left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)^2 \left(\sqrt{b}+\sqrt{2}\right)^2 \left(\sqrt{c}+\sqrt{2}\right)^2.$$

Mihaela Berindeanu

Demonstrație. Cum a, b, $c > 0$ și $a+b+c=6 \implies a<6$, $b<6$, $c<6 \implies 10-a>0$, $10-b>0$, $10-c>0$. Obținem:

$$10-a = 4+6-a = 4+b+c = 2+\frac{b+2}{2}+\frac{c+2}{2}+\frac{b+c}{2} \geq$$
$$\geq 2+\sqrt{2b}+\sqrt{2c}+\sqrt{bc} = \left(\sqrt{b}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{2}\right).$$

Analog, obținem $10-b \geq \left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{2}\right)$ și $10-c \geq \left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{2}\right)$.
Înmulțim cele trei inegalități și rezultă

$$(10-a)(10-b)(10-c) \geq \left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)^2 \left(\sqrt{b}+\sqrt{2}\right)^2 \left(\sqrt{c}+\sqrt{2}\right)^2.$$

Cazul de egalitate se obține pentru $a=b=c=2$.

Barem:

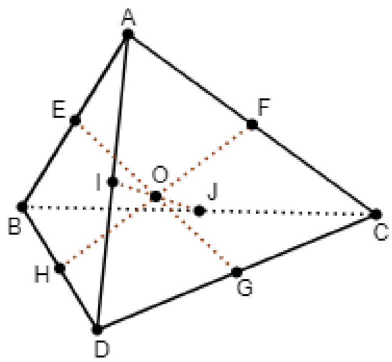
- Substituie $a=6-b-c$ . . . . $2p$
- Aplică inegalitatea mediilor $a+2 \geq \sqrt{2a}$ . . . . $3p$
- Înmulțește cele 3 inegalități și obține cerința . . . . $2p$

□

Problema 2

Fie $ABCD$ un tetraedru în care $AB=1$, $AC=4$ și $BD=4$. Știind că există un punct egal depărtat de mijloacele celor șase muchii ale tetraedrului, să se calculeze lungimea segmentului (CD).

Demonstrație. Notăm cu E, F, G, H, I, J mijloacele muchiilor (AB), (AC), (CD), (BD), (AD), respectiv (BC). Se observă că paralelogramele $EFGH$ și $EIGJ$ au diagonala comună (EG), la fel $EIGJ$ și $IHJF$ au diagonala comună (IJ), de unde deducem că EG, FH și IJ sunt concurente în mijlocul comun O.



Fie M punctul egal depărtat de mijloacele muchiilor. Cum $ME = MG \implies MO \perp EG$. La fel, $MO \perp HF$, $MO \perp IJ$. Cum EG, FH, IJ nu sunt coplanare, rezultă că $M = O$, deci M este mijlocul segmentelor EG, HF, IJ.
Din $ME = MG = MF = MH = MI = MJ$, rezultă că paralelogramele $EFGH$, $EIGJ$, $IFJH$ sunt dreptunghiuri.
Cum $EI = \frac{BD}{2} = 2$, $IG = \frac{AC}{2} = 2$, aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle EIG$ și obținem $EG = 2\sqrt{2}$, deci și $IJ = FH = EG = 2\sqrt{2}$. Din $IH = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$, aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle IHJ$ și obținem:

$$HJ^2 = IJ^2 - IH^2 = \frac{31}{4}$$

Dar

$$HJ = \frac{CD}{2} \implies CD = 2HJ = \sqrt{31}.$$

Barem:

- Demonstrează că bimedianele sunt concurente în mijlocul comun ... 1p
- Demonstrează $MO \perp EG$ și analoagele ... 1p
- Justifică $M = O$ ... 2p
- Justifică $EFGH$ dreptunghi și analoagele ... 1p
- Obține $EG = IJ = FH = EG = 2\sqrt{2}$ ... 1p
- Obține $CD = \sqrt{31}$ ... 1p

□

Problema 3

Fie x și y numere întregi pozitive. Determinați numărul perechilor (x, y), astfel încât $x + y \leq 100$ și pentru care expresia

$$\frac{x^3 + y^3 - x^2y^2}{(x+y)^2}$$

este număr întreg.

Demonstrație. Din

$$\frac{x^3 + y^3 - x^2y^2}{(x+y)^2} \in \mathbb{Z}$$

obținem

$$(x+y)^2 \mid (x+y)^3 - 3xy(x+y) - x^2y^2.$$

De aici,

$$(x+y)^2 \mid 3xy(x+y) + x^2y^2.$$

Obținem că

$$(x+y)^2 \mid 9(x+y)^2 + 4\left(3xy(x+y) + x^2y^2\right)$$

$$(x+y)^2 \mid (3(x+y) + 2xy)^2$$

$$(x+y) \mid (3(x+y)+2xy)$$
$$(x+y) \mid 2xy.$$

Deci $2xy = k(x+y)$, unde $k \in \mathbb{N}$. Din condiția

$$(x+y)^2 \mid 3xy(x+y) + x^2y^2 = (x+y)^2 \cdot \frac{6k+k^2}{4}$$

obținem k par și deci $(x+y) \mid xy$.
De aici, $(x+y)^2 \mid (x+y)^3 - 3xy(x+y) - x^2y^2 = x^3+y^3-x^2y^2$. Prin urmare, trebuie să aflăm toate perechile (x,y), astfel încât $xy = (x+y)z$, unde $z \in \mathbb{N}$. Reținem că $xy > xz$, $xy > yz$ și $(x-z)(y-z) = z^2$. Altfel, dacă notăm $d = (x-z, y-z)$, atunci $x - z = da^2$ si $y - z = db^2$, unde $(a,b) = 1$, iar $x = da(a+b)$, $y = db(a+b)$.
Observăm că $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ și $d = \frac{x+y}{(a+b)^2}$.
Să remarcăm că la perechi diferite (x,y) corespund triplete diferite (d,a,b), iar la triplete diferite (d,a,b) corespund perechi diferite (x,y).
Avem că $x+y = d(a+b)^2 \leq 100$, deci $d \leq \left\lfloor \frac{100}{(a+b)^2} \right\rfloor$ și $a+b \leq 10$. Notăm cu $n = a+b$. Cum $(a,b) = 1 \iff (a, n-a) = 1 \iff (a,n) = 1$, obținem că pentru fiecare $2 \leq n \leq 10$ numărul perechilor ordonate (a,b) pentru care $(a,b) = 1$ este indicatorul lui Euler pentru numărul n.
Astfel, pentru o fixare a lui n, numărul d ia $\left\lfloor \frac{100}{n^2} \right\rfloor$ valori și numărul perechilor ordonate (a,b) este $\sum_{n \leq 10} \phi(n) \cdot \left\lfloor \frac{100}{n^2} \right\rfloor$. Numărul perechilor (x,y) este egal cu:

$$25 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 4 = 105.$$

Barem:

- Obține $(x+y) \mid 2xy$ .... $2p$
- Obține $x+y \mid xy$ .... $1p$
- Demonstrează că $x = da(a+b)$, $y = db(a+b)$, $(a,b) = 1$ .... $1p$
- Afirmă că perechile (x,y) sunt unic determinate de tripletele (d,a,b) și reciproc .... $1p$
- Demonstrează că numărul de perechi ordonate (a,b) este egal cu numărul de numere mai mici decât n și prime cu n .... $1p$
- Obține că numărul perechilor (x,y) este 105 .... $1p$

□

Problema 4

Pe o tablă este desenat un poligon convex cu 2015 de vârfuri și toate diagonalele sale sunt trasate. Alex și Bogdan joacă următorul joc.
Pe rând, fiecare băiat șterge orice număr de la 1 la 10 de laturi adiacente ale poligonului sau orice număr de la 1 la 9 de diagonale (nu neapărat din același vârf). Jucătorul care nu mai poate face o mișcare pierde. Alex începe primul. Care dintre băieți poate câștiga jocul indiferent de cum joacă celălalt băiat? Care este strategia câștigătoare?

”Formula of unity” / ”The third millenium”
2014/2015 – Runda a doua

Demonstrație. Vom împărți jocul în două sub-jocuri.

- Sub-jocul 1. Doar mutările cu diagonale sunt luate în considerație. Vom considera numărul de diagonale disponibile, deci unde 0 este poziție pierzătoare. Analiza retrogradă arată că $1-9$ sunt poziții câștigătoare. Dar atunci 10 este poziție pierzătoare, deci $11-19$ sunt poziții câștigătoare, și așa mai departe. Prin urmare, pozițiile pierzătoare sunt multipli de 10; cum numărul de diagonale este $\frac{2015(2015-3)}{2}$, deci un multiplu de 10, rezultă că primul jucător pierde, strategia câștigătoare a celui de-al doilea jucător fiind de a șterge $10-k$ diagonale dacă la mutarea precedentă primul jucător a șters $1 \leq k \leq 9$ diagonale.

- Sub-jocul 2. Doar mutările cu laturi sunt luate în considerare. Al doilea jucător va aplica o strategie de simetrie; dacă la prima sa mutare, primul jucător a șters $1 \leq k \leq 10$ laturi adiacente, al doilea jucător șterge $11-k$ laturi adiacente, anume cele care lasă din conturul poligonului două linii frânte disjuncte, formate fiecare din $\frac{2015-k-(11-k)}{2} = 1002.$ laturi. De acum înainte, jucătorul al doilea repetă în oglindă mutarea făcută imediat mai înainte de către primul jucător, în cealaltă linie frântă. Prin urmare, de câte ori primul jucător poate muta, și al doilea va putea muta, deci primul jucător pierde.

Așadar, primul jucător din fiecare sub-joc va pierde. Aceasta înseamnă că Bogdan câștigă jocul complet; fiecare mutare a sa va fi în sub-jocul în care a mutat mai înainte Alex, după strategia câștigătoare a acelui sub-joc.

Autorul soluției este cel lângă care v-ați fi găsit, cu adevărat, bucuria de a fi oameni care știu și fac matematică: **DAN SCHWARZ**.

De-a lungul incursiunii mele în matematică, domnul profesor Dan Schwarz a avut o influență crucială asupra mea. Un expert în combinatorică cu un ochi fin pentru argumente elegante, el m-a ajutat să descopăr că domeniul are o frumusețe distinctă, ce poate fi apreciată în același mod în care apreciem o pictură sau o simfonie muzicală. Iar astfel, am realizat că succesul constă în a vedea dincolo de aparentul mecanism rigid și a căuta ingeniozitatea și creativitatea într-o demonstrație, chiar și într-un mediu competitiv.

Octav Drăgoi, medaliat cu aur la IMO 2011

Comentariile, pe care vi le recomand cu speranța că vă vor determina să nu mai alergați doar după puncte, le găsiți aici.

Barem:

- Găsește strategia câștigătoare pentru mutările cu diagonale . . . 3p
- Găsește strategia câștigătoare pentru mutările cu laturi . . . 4p

□

Problemele 1-4: . . . $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: . . . $0p$
Total: . . . $28p$

Timp de lucru: . . . 4 ore