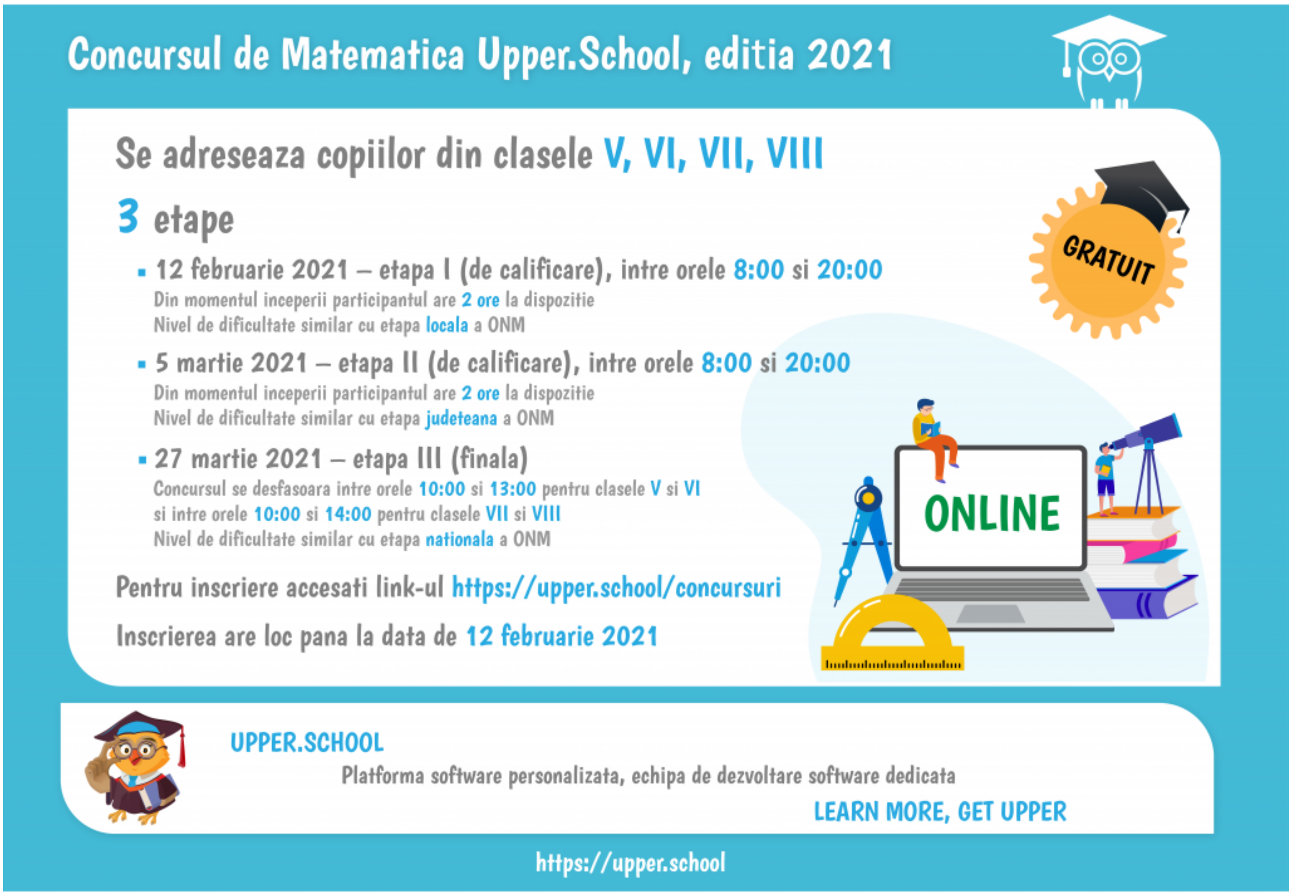


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2021

Etapa I
Clasa a-VI-a

- Soluții -

Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu

§1 Soluții

Problema 1

Mulțimea A este formată din numere naturale al căror produs este 210. Care este cel mai mare număr de elemente pe care îl poate avea această mulțime?

a) 1 b) 210 c) 5 d) 4

Supliment Gazeta Matematică, 2020

Demonstrație.
Pentru a obține numărul maxim de elemente al mulțimii A trebuie să îl scriem pe 210 ca produsul a cât mai multe numere naturale distincte. La factorii primi care apar în descompunerea lui 210 îl adaugăm și pe 1, ca element neutru al operației de înmulțire.
$210 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.
Numărul maxim de elemente al mulțimii A este $\boxed{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 2

Pe segmentul (AB) cu lungimea de 180 cm se iau puncte care îl împart în m segmente congruente, având lungimile exprimate prin numere naturale pătrate perfecte. Care este suma valorilor posibile pe care le poate avea m?

a) 49 b) 250 c) 180 d) 70

Colecția Gazetei Matematice

Demonstrație.
$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Pătratele perfecte care sunt divizori ai lui 180 sunt 1, 4, 9 și 36. Segmentul (AB) poate fi împărțit în 180 segmente de lungime 1, în 45 segmente de lungime 4, în 20 segmente de lungime 9 sau în 5 segmente de lungime 36. Așadar $m \in \{5, 20, 45, 180\}$. Suma valorilor posibile pe care le poate avea m este $5 + 20 + 45 + 180 = \boxed{250}$.

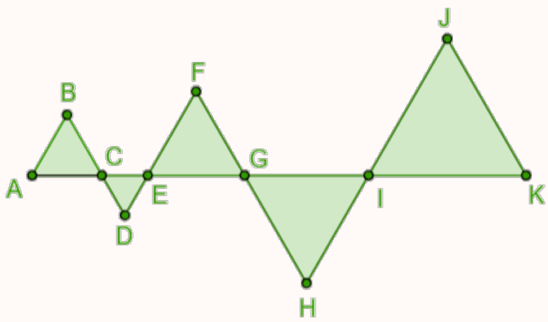
Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 3

Fiecare dintre cele cinci triunghiuri din figura următoare este echilateral (are toate laturile de aceeași lungime). Suma perimetrelor celor cinci triunghiuri este de 105 *cm*. Care este lungimea segmentului (AK)?

a) 40 cm b) 35 cm c) 30 cm d) 55 cm



Demonstrație.
Suma perimetrelor celor 5 triunghiuri este $3 \cdot AC + 3 \cdot CE + 3 \cdot EG + 3 \cdot GI + 3 \cdot IK = 105$. De aici obținem că lungimea segmentului (AK) este egală cu $\boxed{35\ cm}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ 5p

□

Problema 4

Într-o urnă sunt bile roșii, albe și galbene. Știm că:

- numărul total de bile este egal cu cel mai mic multiplu comun al numerelor 10 și 12;
- numărul bilelor de fiecare culoare este număr prim;
- numărul bilelor albe este divizibil cu 5;
- numărul bilelelor roșii este mai mare decât numărul bilelor galbene.

Care este diferența dintre numărul bilelor roșii și cele galbene?

a) 12 b) 23 c) 5 d) 51

Demonstrație.
Cel mai mic multiplu comun al numerelor 10 și 12 este egal cu 60. Cum numărul bilelor albe este prim și divizibil cu 5 obținem ca unică variantă un număr de 5 bile albe. Notăm cu r numărul bilelor roșii și cu g numărul bilelor galbene. Pentru că $r + g = 55$ și 55 este număr impar rezultă că unul dintre numerele r sau g este număr par. Singurul număr prim și par este 2. În plus $r \geq g$, de aici soluția unică $r = 53, g = 2$. Diferența dintre numărul bilelor roșii și cele galbene este $\boxed{51}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ 5p

□

Problema 5

Fie $\angle u_1, \angle u_2, ..., \angle u_n$ unghiuri proprii în jurul unui punct O, oricare două unghiuri adiacente fiind complementare. Care este valoarea lui n?

a) 12 b) 10 c) 8 d) 7

Demonstrație.
$m(\angle(u_1)) + m(\angle(u_2)) + ... + m(\angle(u_n)) = 360^o$. Cum măsura oricăror două unghiuri adiacente este 90^o, putem grupa unghiurile câte două. În jurul unui punct se pot trasa exact patru unghiuri drepte, iar fiecare dintre acestea se împarte în câte două unghiuri proprii, obținem că valoarea lui n este egală cu $\boxed{8}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ 5p

□

Problema 6

Dacă $a, b, c \in \{1, 2, 3, ..., 59\}$ și $a^o b' c" + b^o a' c"$ este un număr natural în grade, atunci $a+b+c$ este egal cu:

a) 80 b) 89 c) 98 d) 59

Demonstrație.
Valoarea lui c este egală cu 30, astfel $30" + 30" = 1'$. Pentru a obține un rezultat număr natural în grade este necesar ca $a + b \in M_{60} - 1$. Suma $a + b$ este cel mult egală cu 118 și singurul număr care verifică toate condițiile este 59. Valoarea sumei $a + b + c = \boxed{89}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ 5p

□

Problema 7

Cel mai mic număr natural nenul care împărțit pe rând la 6, 7, respectiv 8 dă resturile 5, 6, respectiv 7 este:

a) 187 b) 100 c) 567 d) 167

Demonstrație.
Bineînțeles că cea mai ușoară cale este verificarea celor patru variante, nu întâmplător soluția problemei a fost poziționată pe ultimul loc.
Altfel, notând cu n numărul căutat și cu a, b, c câturile celor trei împărțiri ajungem la relațiile

$$n = 6a + 5$$

$$n = 7b + 6$$

$$n = 8c + 7.$$

Adunăm la fiecare relație câte un 1 și observăm că $n + 1$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor 6, 7 și 8. Valoarea cerută pentru n este $\boxed{167}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ 5p

□

Problema 8

Rezultatul calculului $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{42}$ este egal cu:

a) 0 b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{42}$ d) 1

Demonstrație.
Rezultatul se obține prin calcul direct sau folosind formula de descompunere în fracții egiptene.

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

Astfel, $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$.

Rezultatul calculului este egal cu $\boxed{0}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

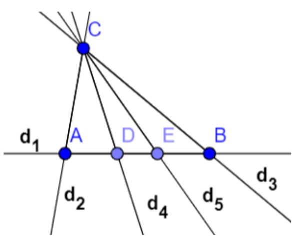
□

Problema 9

Se consideră în plan o mulțime M formată din 5 puncte care nu sunt toate situate pe o aceeași dreaptă. Notăm cu d numărul dreptelor determinate de acestea. Care este cea mai mică valoare pe care o poate lua d?

a) 6 b) 7 c) 4 d) 5

Demonstrație.
Cum cele 5 puncte nu sunt toate coliniare rezultă că există cel puțin trei, fie acestea A, B, C, nesituate pe o aceeași dreaptă. Un al patrulea punct, să îi spunem D, se poate afla în una dintre situațiile: fie se află pe una dintre dreptele AB, BC, CA, fie este înafara lor. În cazul în care D nu se găsește pe niciuna dintre dreptele deja existente, numărul dreptelor este 6. În cazul în care $D \in AB$, de exemplu, numărul dreptelor este 4. Repetând raționamentul pentru al cincilea punct, E, obținem că acesta trebuie să se găsească pe una dintre cele 4 drepte (altfel, împreună cu A, B, C ar determina șase drepte). Nu particularizăm cu nimic problema fixându-l pe D pe dreapta AB. Dacă $E \in BC$ (sau AC) avem șase drepte: AB, AC, AE, BC, DC, DE. Dacă $E \in AB$ numărul d este egal cu $\boxed{5}$.



Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 10

Dacă $a,\ b \in \mathbb{N}$ și $A = \{3a+2, 7\},\ B = \{b+5, 3a+1\}$ aflați valorile a și b pentru care $card(A \cup B) = 2$, apoi alegeți varianta care reprezintă suma lor (am notat prin $card(A \cup B)$ numărul de elemente al mulțimii $A \cup B$).

a) 7 b) 6 c) 5 d) 2

Demonstrație.
Avem 2 cazuri în care $card(A \cup B) = 2$.

I: $card(A) = card(B) = 1$, deci $3a+2 = 7 \implies 3a = 5$, contradicție.

II: $A = B$ și au câte două elemente distincte; cum $3a+1 \neq 3a+2$ singura variantă posibilă este

$$3a+2 = b+5 \implies b = 3a-3$$

$$3a+1 = 7 \implies a = 2 \implies b = 3 \cdot 2 - 3 = 3$$

Prin urmare, $a + b = 2 + 3 = \boxed{5}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 11

Proiectele propuse de organizatorii unei tabere sunt puse în practică doar după ce sunt votate de elevi. Pentru proiectele A și B au participat la vot 253 elevi. S-au numărat 135 voturi pentru proiectul A, 147 voturi pentru proiectul B, iar 30 de elevi nu au votat niciun proiect. Câți elevi au votat pentru ambele proiecte?

a) 10 b) 35 c) 70 d) 59

Demonstrație.
Notez cu x numărul elevilor care au votat ambele proiecte. $253 - 30 = 223$ elevi au votat doar proiectul A, doar proiectul B sau ambele proiecte.

$$223 + x = 135 + 147 \implies x = 282 - 223 = \boxed{59}$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 12

Tabăra "Upper School" are un parc de aventuri foarte bine dotat. 35 de copii îl vizitează zilnic, alți 20 de copii vizitează parcul o dată la două zile, iar restul copiilor din tabără nu vizitează parcul de aventuri, fiind interesați de campionatele sportive pe echipe. Dacă astăzi au fost 43 de copii în parcul de aventuri, câți vor vizita parcul mâine?

a) 47 b) 55 c) 22 d) 25

Demonstrație.
Printre cei 43 copii care au vizitat astăzi parcul de aventuri îi găsim pe cei 35 care vizitează parcul zilnic și încă 8 dintre cei care vizitează parcul o dată la două zile . Mai rămân 12 copii

dintre cei care vizitează parcul o dată la două zile, care vor veni în ziua următoare, la care se adaugă cei 35 de copii care vizitează zilnic parcul: $35 + 12 = \boxed{47}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ 5p

□

Problema 13

Numărul $a = \overline{2021a_1a_2...a_n2021}$ este cel mai mic număr natural cu suma cifrelor 2021. Care este valoarea sumei $a_1 + a_6$?

a) 13 b) 2021 c) 39 d) 9

Demonstrație.
$S(a) = a_1 + a_2 + ... + a_n + 2 \cdot (2 + 0 + 2 + 1) = 2021 \iff a_1 + a_2 + ... + a_n = 2011$
Pentru ca numărul să fie cât mai mic o primă condiție este să aibă cât mai puține cifre, prin urmare cât mai multe dintre acestea trebuie să fie egale cu de 9.
2011:9=223 rest 4 $\Longrightarrow \overline{a_1a_2...a_n} = \overline{499..9}$
Valoarea sumei $a_1 + a_6$ este egală cu $\boxed{13}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ 5p

□

Problema 14

Muncind 4 zile, cinci veverițe câștigă 5 saci cu alune și 60 de sticle de limonadă. Douăsprezece veverițe, la fel de harnice, câștigă în 3 zile 12 saci cu alune. Câte sticle de limonadă valorează un sac cu alune?

a) 10 b) 36 c) 12 d) 15

Demonstrație.
În 3 zile 12 veverițe câștigă 12 saci cu alune, deci în 3 zile o veveriță câștigă un sac cu alune. Primele 5 veverițe câștigă 5 saci cu alune pentru 3 zile de lucru, deci primesc 60 de sticle de limonadă pentru o zi de lucru. În 3 zile de lucru veverițele ar primi $60 \cdot 3 = 180$ de sticle de limonadă, echivalentul a 5 saci de alune. Prin urmare un sac de alune valorează $\frac{180}{5} = \boxed{36}$ sticle de limonadă.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ 5p

□

Problema 15

Care este valoarea unei pătrimi din 8^{2018} ?

a) 2^{3036} b) 2^{4026} c) 4^{4014} d) 2^{6052}

Demonstrație.

$$8^{2018} = \left(2^3\right)^{2018} = 2^{6054}$$
$$\frac{8^{2018}}{4} = \frac{2^{6054}}{2^2} = 2^{6054-2} = \boxed{2^{6052}}$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 16

Strada Îndrăznescu are nu mai mult de 15 case, numerotate 1,2,3 și așa mai departe. Doamna Popescu locuiește aici, dar nu în prima casă. Produsul numerelor caselor de dinainte de Doamna Popescu este egal cu produsul numerelor caselor de după casa ei. Câte case sunt pe strada Îndrăznescu?

a) 14 b) 12 c) 10 d) 7

Demonstrație.
Dacă numărul de case este cel puțin egal cu 11 atunci Doamna Popescu locuiește în casa cu numărul 11 pentru că este număr prim, apare o singură dată, dar nu se mai verifică egalitatea dintre produsele numerelor caselor de dinainte și de după. Mai precis, dacă numărul casei Doamnei Popescu este 11, după ea ar mai fi o singură casă pentru că și 13 este număr prim și apare doar o dată, dar produsul celor de dinainte este 10!, mult prea mare față de 12.
Prin urmare numărul de case este cel mult egal cu 10. Din nou, 7 apare o singură dată ca factor prim și singura variantă este ca numărul casei Doamnei Popescu să fie 7. Produsul numerelor mai mici decât 7 este 720, de unde necesitatea ca numărul total de case să fie $\boxed{10}$.
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$
Dacă printre numerele caselor nu apare 7 atunci mai avem variantele 5,3,2 pentru numărul casei Doamnei Popescu care nu se verifică.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$