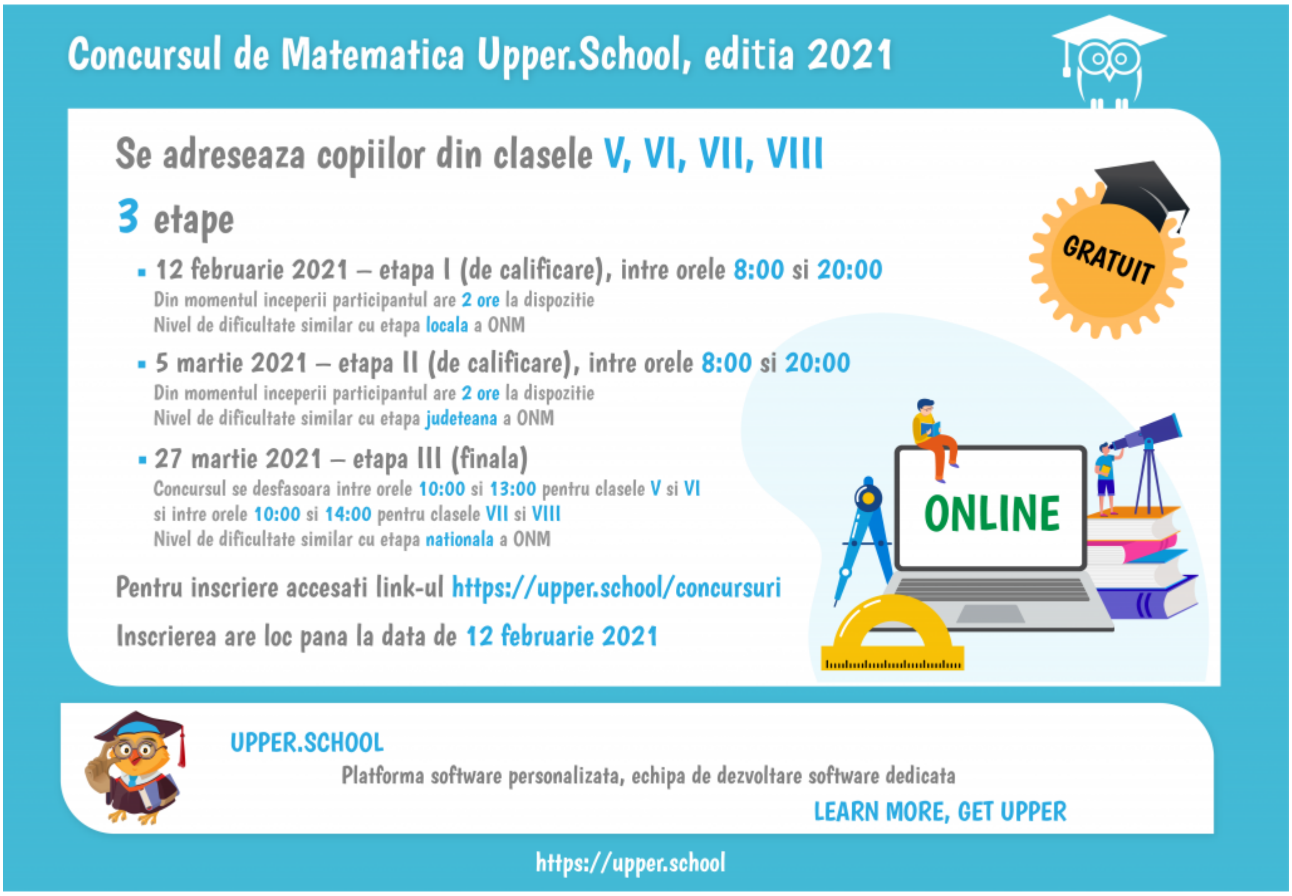


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2021

Etapa I
Clasa a-VIII-a

- Soluții -

Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu

§1 Soluții

Problema 1

$A = \sqrt{1 + 2011\sqrt{1 + 2012\sqrt{1 + 2013\sqrt{1 + 2014 \cdot 2016}}}}$

Care este valoarea lui A?

a) 2016 b) 2015 c) 2013 d) 2012

Demonstrație.
$1+2014\cdot2016 = 1+(2015-1)(2015+1) = 1+2015^2-1 = 2015^2 \implies \sqrt{1+2014\cdot2016} = 2015$.
Continuând raționamentul vom obține că $\boxed{A = 2012}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 2

Numerele $x, y, z \in \mathbb{R}$ satisfac inegalitatea $x(x-5) + y(y-7) + z(z+4) \leq \frac{-45}{2}$.
Care este valoarea sumei $x + y + z =$?

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3

Demonstrație.
$x(x-5)+y(y-7)+z(z+4) \leq \frac{-45}{2} \iff \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{2}\right)^2 + (z+2)^2 \leq 0 \iff$
$x = \frac{5}{2}, y = \frac{7}{2}, z = -2$. Valoarea sumei $x+y+z$ este egală cu $\boxed{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 3

Fie $a, b \in \mathbb{R}^*, a, b > 0$ care verifică relația $4a^2 - 8ab - 21b^2 = 0$.
Care este valoarea expresiei $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$?

a) $\sqrt{\frac{1}{21}}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ c) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ d) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

Demonstrație.
$4a^2-8ab-21b^2 = 0 \iff 4a^2+6ab-14ab-21b^2 = 0 \iff 2a(2a+3b)-7b(2a+3b) =$
$0 \iff (2a+3b)(2a-7b) = 0 \iff \frac{a}{b} = \frac{-3}{2}$ sau $\frac{a}{b} = \frac{7}{2}$.
Cum $\frac{a}{b} > 0$ avem soluția unică $\frac{a}{b} = \frac{7}{2}$. Înlocuind în expresia de calculat pe a cu $\frac{7b}{2}$ obținem rezultatul $\boxed{\frac{\sqrt{5}}{3}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 4

În fiecare zi cățelușa Heidi mănâncă dimineața $\frac{1}{3}$ și seara $\frac{1}{4}$ dintr-o conservă de carne. Stăpâna cățelușei a deschis miercuri dimineață un bax cu 5 conserve. În ce zi a săptămânii va trebui deschis următorul bax?

a) Joi b) Vineri c) Luni d) Miercuri

Demonstrație.
Rația zilnică este $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ dintr-o conservă. Un bax de 5 conserve se consumă în $5 : \frac{7}{12} = \frac{5 \cdot 12}{7} = \frac{60}{7} = 8\frac{4}{7}$ zile, deci următorul bax va fi deschis în ziua a noua care va fi $\boxed{joi}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

□

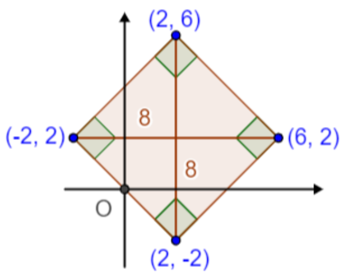
Problema 5

În sistemul de coordonate XOY se consideră punctele $A(6, 2), B(2, 6), C(-2, 2), D(2, -2)$. Care este aria patrulaterului $ABCD$?

a) 36 b) 49 c) 32 d) 16

Gazeta Matematică, Supliment, 2020

Demonstrație.
Patrulaterul $ABCD$ este un pătrat cu diagonalele de lungime 8. Aria este egală cu $\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{8 \cdot 8}{2} = \boxed{32}$.



Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 6

a, b, c sunt trei numere naturale impare consecutive în ordine crescătoare.
Care este valoarea expresiei $a^2 - 2b^2 + c^2$?

a) 0 b) 2 c) 4 d) 8

Demonstrație.
Precizarea că numerele sunt impare este importantă doar prin faptul că diferența dintre două

numere impare consecutive este 2. Rescriem expresia într-o singură variabilă și obținem $a^2 - 2b^2 + c^2 = a^2 - 2(a+2)^2 + (a+4)^2 = \boxed{8}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ 5p

□

Problema 7

Fie a, b, c trei numere reale astfel încât $0 < a < b < c$. Care dintre următoarele situații nu este posibilă?

a) $a + c < b$ b) $a < c$ c) $a < b$ d) $b - c < a$.

Demonstrație.
Afirmațiile b și c sunt evident adevărate, ele făcând parte chiar din ipoteză. Pentru ultima afirmație este suficient să observăm că $b - c < 0$, iar $a > 0$, prin urmare este adevărată mereu. Prima afirmație nu este adevărată pentru că doar c singur este mai mare decât b. Situația care nu este posibilă este $\boxed{a + c < b}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ 5p

□

Problema 8

Care este probabilitatea ca la extragerea a două elemente distincte din mulțimea $A = \{-3, \ -2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4\}$ produsul acestora să fie egal cu zero?

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{2}$

Demonstrație.
Cardinalul mulțimii A este 8. Numărul de cazuri posibile este dat de numărul de moduri în care se pot selecta două elemente distincte din mulțimea A. Fiecare element poate fi ales împreună cu oricare altul din mulțime, adică în $8 \cdot 7$ moduri, însă am numărat fiecare submulțime de două ori. Numărul de submulțimi de două elemente este $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$. În continuare calculăm numărul cazurilor favorabile. Sunt 7 cazuri în care produsul a două elemente din mulțimea A este 0 și anume toate submulțimile de 2 elemente cu un element egal cu 0. Calculez probabilitatea ca raport între numărul cazurilor favorabile și numărul cazurilor posibile:

$$p = \frac{7}{28} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ 5p

□

Problema 9

Știind că are loc relația $2^n \mid 15^8 - 11^8$, cu $n \in \mathbb{N}$, aflați valoarea maximă a numărului n.

a) 5 b) 6 c) 4 d) 3

Demonstrație.

$$15^8 - 11^8 = (15^4 + 11^4)(15^4 - 11^4) = (15^4 + 11^4)(15^2 + 11^2)(15^2 - 11^2)$$

Suma a două pătrate perfecte impare este multiplu de 4 plus 2, deci $15^4 + 11^4$ și $15^2 + 11^2$ se divid cu 2 fiecare, dar nu cu 4, iar $15^2 - 11^2$ este divizibil cu 8, nedivizibil cu 16, deci $n_{max} = 1 + 1 + 3 = \boxed{5}$

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

□

Problema 10

Care număr dintre cele patru variante de mai jos este pătrat perfect?

a) $\dfrac{18! \cdot 19!}{2}$ b) $\dfrac{19! \cdot 20!}{2}$ c) $\dfrac{23! \cdot 24!}{2}$ d) $\dfrac{97! \cdot 98!}{2}$

Demonstrație.

$$\boxed{\frac{97! \cdot 98!}{2}} = \frac{97! \cdot 97! \cdot 98}{2} = (97!)^2 \cdot \frac{98}{2} = (97!)^2 \cdot 49 = (97! \cdot 7)^2$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 11

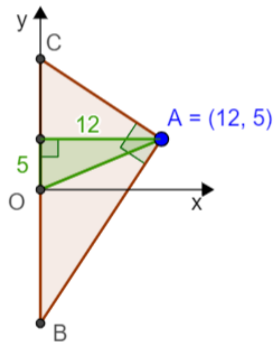
În sistemul de coordonate XOY prin punctul $A(12, 5)$ se duc două drepte perpendiculare care taie axa OY în punctele B și C, simetrice față de origine. Aflați aria triunghiului $\triangle ABC$.

a) $\dfrac{67}{2}$ b) $18\sqrt{3}$ c) 312 d) 156

Demonstrație.

B și C fiind simetrice față de $O \implies OB = OC$ deci în triunghiul dreptunghic $\triangle ABC$ segmentul (AO) este mediana corespunzătoare ipotenuzei și, conform teoremei medianei, $\implies AO = \dfrac{BC}{2}$.
Aplicând teorema lui Pitagora obținem $AO = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \implies BC = 26$.

$$A_{\triangle ABC} = \frac{26 \cdot 12}{2} = \boxed{156}$$



Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 12

Care este suma numerelor reale a și b care sunt soluții ale ecuației

$$|a+3|+b^2-14b+49=0?$$

a) 10 b) 4 c) -11 d) 0

Demonstrație.
Ecuația dată este echivalentă cu

$$|a+3|+(b-7)^2=0.$$

Cum $|a+3|\geq 0$ și $(b-7)^2\geq 0$ obținem că are loc cazul de egalitate. De aici $a=-3$ și $b=7$. Suma lor este egală cu $\boxed{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

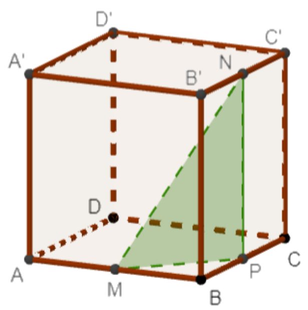
□

Problema 13

În cubul $ABCDA'B'C'D'$ notăm cu M, N mijloacele laturilor $(AB), (B'C')$. Care este valoarea sinusului unghiului determinat de dreapta MN și planul (ABC)?

a) $\sqrt{6}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Demonstrație.



Vom nota cu l lungimea laturii cubului și cu P proiecția punctului N pe dreapta BC.
$BP \parallel B'N, BB' \parallel NP \implies$ patrulaterul $BB'NP$ este un paralelogram, iar $m(\angle B'BP)=90^o \implies BB'NP$ este dreptunghi. Cum $BB'\perp(ABC) \implies NP\perp(ABC) \implies Pr_{(ABC)}(MN)=MP \implies \angle(MN,(ABC))=\angle(MN,MP)=\angle NMP$.
În triunghiul $\triangle ABC$ segmentul (MP) este linie mijlocie $\implies MP=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{l\sqrt{2}}{2}$.
Cum $NP\perp(ABC)$ și $MP\subset(ABC) \implies NP\perp MP$. Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $\triangle MPN$, de unde $MN^2=MP^2+NP^2 \iff MN^2=\left(\dfrac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2+l^2=\dfrac{6l^2}{4} \iff MN=\dfrac{l\sqrt{6}}{2}$.

Calculăm $sin(\angle NMP)$ în triunghiul dreptunghic $\triangle MNP$ și obținem $sin(\angle NMP) = \frac{PN}{MN} = \frac{l}{\frac{l\sqrt{6}}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

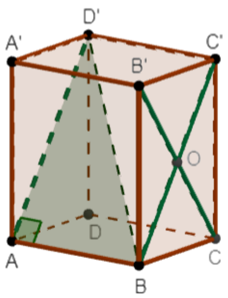
□

Problema 14

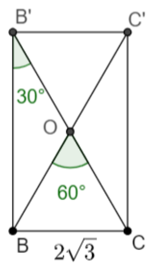
În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cunoaștem dimensiunile $AB = 3\sqrt{2}\ cm$ și $BC = 2\sqrt{3}\ cm$, iar $AA' > AD$. Unghiul determinat de dreptele AD' și $B'C$ are măsura de $60°$. Care este valoarea ariei triunghiului $\triangle ABD'$?

a) $7\sqrt{6}\ cm^2$ b) $6\sqrt{6}\ cm^2$ c) $8\sqrt{6}\ cm^2$ d) $10\sqrt{6}\ cm^2$

Demonstrație.



Deoarece $AB \parallel D'C'$ și $(AB) \equiv (D'C') \Longrightarrow$ punctele A, D', C', B sunt coplanare și $AD'C'B$ este paralelogram. Prin urmare $AD' \parallel BC' \Longrightarrow \angle(AD', B'C) = \angle(BC', B'C) = 60°$



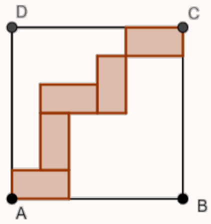
Dar $BB' > BC \Longrightarrow m(\angle BCB') > m(\angle BB'C) \Longrightarrow m(\angle BCB') > 45°$. Notăm cu $\{O\} = BC' \cap C'B$. Deoarece $BCC'B'$ este dreptunghi rezultă că $\triangle BOC$ este isoscel. Cum $m(\angle BOC) = 180° - 2 \cdot m(\angle BCO)$ și $m(\angle BCO) > 45° \Longrightarrow m(\angle BOC) < 90°$. Dar $m(\angle BOC) \in \{60°, 120°\}$. Cumulând rezultatele obținute rezultă că $m(\angle BOC) = 60°$ și $\triangle BOC$ este echilateral, iar $m(\angle BB'C) = 30°$. În triunghiul dreptunghic $\triangle BB'C$ din teorema unghiului de $30°$ obținem că $B'C = 4\sqrt{3}$. Pentru că $B'C = BC' = AD' \Longrightarrow A_{ABD'} = \frac{AD' \cdot AB}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2}}{2} = \boxed{6\sqrt{6}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 15

5 ornamente dreptunghiulare identice, fiecare având aria de 12 dm^2, sunt așezate pe un zid în formă de pătrat ca în figura de mai jos (laturile ornamentelor dreptunghiulare sunt paralele cu laturile pătratului mare sau se sprijină pe acestea). Care este aria zidului?



a) 312 dm^2 b) 300 dm^2 c) 198 dm^2 d) 216 dm^2

Demonstrație.
Fie x lungimea ornamentului dreptunghiular, y lățimea ornamentului dreptunghiular.

$$AB = x + (x - y) + y + x = 3x$$

$$BC = y + x + x + y = 2x + 2y$$

$$AB = BC \implies 2x + 2y = 3x \implies x = 2y$$

Aria unui ornament dreptunghiular este $xy = 2y^2 = 12$. Prin urmare, $y = \sqrt{6}$, iar $x = 2\sqrt{6}$. Aria pătratului este

$$AB^2 = (3x)^2 = 9 \cdot \left(2\sqrt{6}\right)^2 = 9 \cdot 24 = \boxed{216\ dm^2}$$

Soluție alternativă
Pătratul $ABCD$ este compus din 36 pătrățele, iar fiecare ornament dreptunghiular acoperă exact 2 pătrățele. Pentru acoperirea întregului pătrat sunt necesare 18 ornamente care acoperă $\boxed{216\ dm^2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

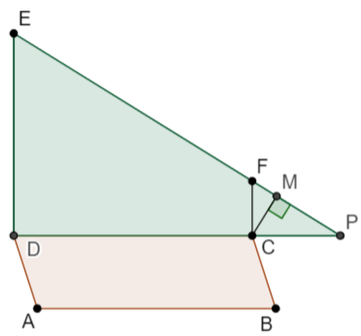
□

Problema 16

Pe planul dreptunghiului $ABCD$ cu lungimile laturilor $AB = \sqrt{15}\ cm$ și $BC = \sqrt{10}\ cm$ se ridică perpendicularele CF și DE, astfel încât $CF = 2\ cm$ și $DE = 3\ cm$. Care este distanța de la punctul B la dreapta EF?

a) $\frac{\sqrt{55}}{2}$ b) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{61}}{3}$ d) $\frac{24}{25}$

Demonstrație.



Fie $\{P\} = EF \cap DC$. Notăm cu M proiecția punctului C pe EP. Deoarece $CFED$ este trapez dreptunghic și $CF < DE \Longrightarrow m(\angle CFE) > 90°$. Prin urmare, punctul M se află între punctele F și P. Din $BC \perp (DCFE)$ și $CM \perp FP$ aplicând teorema celor 3 perpendiculare obținem $BM \perp EF \Longrightarrow d(B, EF) = BM$.

Cum $CF \parallel DE \Longrightarrow \triangle PCF \sim \triangle PDE \Longrightarrow \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{FC}{DE} = \dfrac{2}{3} \Longleftrightarrow \dfrac{PC}{PD - PC} = \dfrac{2}{3-2} = 2 \Longrightarrow PC = 2 \cdot DC = 2\sqrt{15}$.

În $\triangle FCP$ dreptunghic aplicăm teorema lui Pitagora și obținem $FP^2 = FC^2 + CP^2 = 4 + 60 = 64 \Longrightarrow FP = 8$. În continuare scriem aria triunghiului dreptunghic $\triangle FCP$ în 2 moduri și obținem $\dfrac{FC \cdot CP}{2} = \dfrac{CM \cdot FP}{2}$ de unde obținem $CM = \dfrac{FC \cdot CP}{FP} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

În final, aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic BCM de unde $BM^2 = BC^2 + CM^2 = 10 + \dfrac{15}{4} = \dfrac{55}{4} \Longrightarrow BM = \boxed{\dfrac{\sqrt{55}}{2}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

□

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$