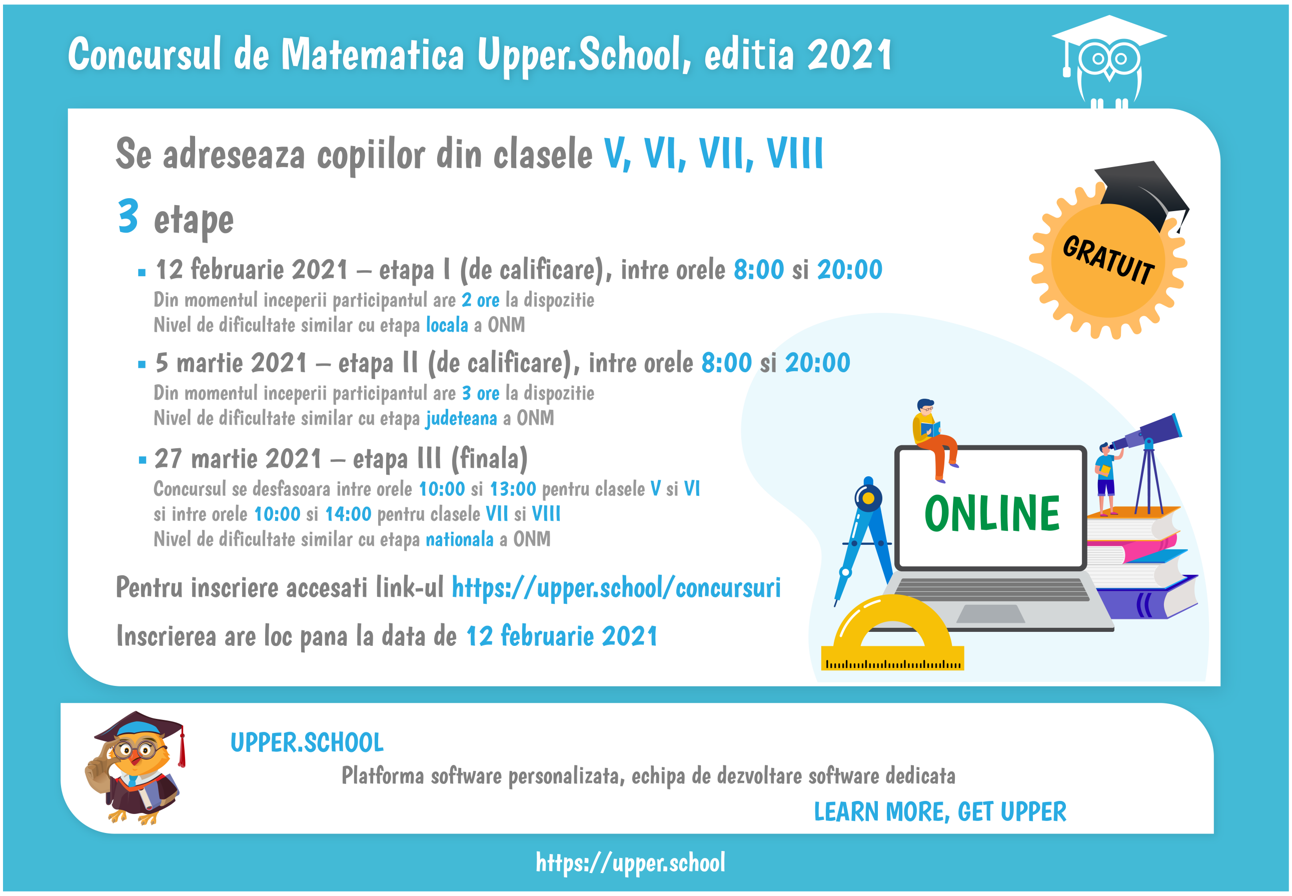

Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2021

Etapa II
Clasa a-V-a

- Soluții -

Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu,
Robert Dragomirescu

§1 Soluții

Problema 1

Valoarea sumei $\overline{UPP10} + \overline{UPP12}$ este 135422. Care este rezultatul calculului $U + P + P$?

Demonstrație.
$\overline{UPP10}+\overline{UPP12} = 135422 \iff 100\cdot\overline{UPP}+10+\overline{UPP}+12 = 135422 \iff 200\cdot\overline{UPP}+22 = 135422 \iff \overline{UPP} = 677 \implies U + P + P = \boxed{20}$.

Răspuns corect: $\boxed{20}$ 5p

□

Problema 2

La concursul UpperTeams fiecare echipă primește spre rezolvare un număr de 91 de probleme pentru două săptămâni. Echipa Anei își propune să lucreze în fiecare zi același număr de probleme, dar mai mult de o problemă pe zi și nu pe toate într-o singură zi. Care este numărul minim de probleme pe care ar putea să îl lucreze echipa Anei pe zi astfel încât să se respecte planul?

Demonstrație.
Pentru că $91 = 7 \cdot 13$, iar 7 și 13 sunt numere prime rezultă că numărul minim de probleme pe care trebuie să îl lucreze echipa Anei zilnic este $\boxed{7}$, terminând sarcina în 13 zile, adică în mai puțin de două săptămâni.

Răspuns corect: $\boxed{7}$ 5p

□

Problema 3

Ana are 500 de bile roșii și verzi. Dorind să aibă numai bile roșii, ea face schimb cu prietena ei, Bianca. Aceasta îi oferă 5 bile roșii pentru fiecare 13 bile verzi. După mai multe schimburi Ana are 300 de bile roșii. Câte bile roșii a avut inițial Ana?

Demonstrație.
La fiecare schimb Ana pierde $13 - 5 = 8$ bile. Pentru că la final Ana are cu 200 de bile mai puțin, înseamnă că s-au făcut $200 : 8 = 25$ schimburi, în care Ana i-a dat Biancăi $13 \cdot 25$ bile verzi. Asta înseamnă că inițial Ana avea $500 - 325 = \boxed{175}$ bile roșii.

Răspuns corect: $\boxed{175}$ 5p

□

Problema 4

Care este cel mai mare număr natural de 4 cifre cu proprietatea că diferența oricăror două cifre vecine este egală cu 3?

Demonstrație.
Pentru a fi cât mai mare trebuie ca prima cifră să fie 9. Cifrele nu sunt distincte, așa încât le putem folosi pe cele mai mari, adică 9 și 6.
Cel mai mare număr pe care îl putem forma este $\boxed{9696}$.

Răspuns corect: $\boxed{9696}$ .... $5p$

$\square$

Problema 5

Andrei are o anumită sumă de lei și se pregătește pentru două evenimente: concursul de matematică Upper School și aniversarea Anei. Dacă ar câștiga premiul de 50 de lei de la concurs și nu ar merge la aniversarea Anei, noua sumă de lei a lui Andrei ar fi cubul unui număr natural, iar dacă nu ar câștiga premiul, dar ar cheltui pentru cadoul Anei 50 de lei, noua sumă de lei a lui ar fi pătratul aceluiași număr natural. Care este suma pe care o are Andrei?

Demonstrație.
Dacă notăm cu a suma de lei pe care o are Andrei, relațiile se rescriu

$$a + 50 = x^3$$

$$a - 50 = x^2$$

Cum numărul $a + 50$ este cu 100 mai mare față de $a - 50$ obținem că $x^3 - x^2 = 100 \iff x^2(x-1) = 100 = 1 \cdot 100 = 4 \cdot 25 = 25 \cdot 4 = 100 \cdot 1$. Dar $x^3 \geq 50 \implies x \geq 4 \implies x = 5$ și $a = 75$. Prin urmare, Andrei are $\boxed{75}$ de lei.

Răspuns corect: $\boxed{75}$ .... $5p$

$\square$

Problema 6

Mama are cu 15 Ron mai mult decât Ana și cu 12 Ron mai mult decât Bogdan. Mama îi dă Anei a Ron și lui Bogdan b Ron astfel încât toți trei au acum sume egale.
Care este valoarea produsului $a \cdot b$?

Demonstrație.
Notăm cu x suma pe care o are mama inițial. Atunci Ana are $x - 15$, iar Bogdan $x - 12$. Cei trei au în total $3x - 27$ și dacă notăm cu y suma pe care o are fiecare după schimburi atunci are loc egalitatea $3x - 27 = 3y \implies x - 9 = y$. Fiecare va avea $x - 9$ Ron. Ana primește 6 Ron și Bogdan 3 Ron. Produsul $a \cdot b$ are valoarea $\boxed{18}$.

Răspuns corect: $\boxed{18}$ .... $5p$

$\square$

Problema 7

Folosind toate cifrele, fiecare cifră o singură dată, formăm patru numere naturale: unul de o cifră, unul de două cifre, unul de trei cifre și unul de patru cifre. Care este cea mai mică valoare pe care o poate lua numărul de trei cifre, știind că suma numerelor este 2016?

Demonstrație.
Scriem suma numerelor astfel: $a + \overline{bc} + \overline{def} + \overline{ghij} = 2016 \iff a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+9b+99d+9e+999g+99h+9i = 2016 \iff 111g + 11(d+h) + b + e + i = 219 \implies g = 1 \implies 11(d+h) + b + e + i = 108$. Cum $b + e + i \leq 27 \implies d + h \geq 8$. Pe de altă parte $11(d+h) \leq 108 \implies d + h \leq 99 \implies d + h \in \{8, 9\}$. Pentru ca numărul de trei cifre să fie cât

mai mic trebuie ca cifra d să fie cât mai mică.
Mai observăm că $g = 1$ pentru că, altfel, $\overline{def}$ nu mai este numar de trei cifre, prin urmare $d \geq 2$.
Dacă $d + h = 8$ cea mai mică valoare pentru d este 2 și $b + e + i = 20$. Cum e trebuie să fie cât mai mică obținem $e = 3$ și $f = 0$.
Dacă $d + h = 9$, cea mai mică valoare pentru d este 2 si $b + e + i = 9 \implies e = 0$ și $f = 3$. Prin urmare, valoarea minimă pentru $\overline{def}$ este $\boxed{203}$. Un exemplu este $9 + 48 + 203 + 1756 = 2016$.

Răspuns corect: $\boxed{203}$ .... $5p$

□

Problema 8

Câte numere naturale de trei cifre sunt exact cu 36 mai mari decât un număr de două cifre?

Demonstrație.
Pentru a obține un astfel de număr trebuie să adunăm 36 la un număr de două cifre.
$100 \leq 36 + \overline{ab} \implies \overline{ab} \geq 64$. Pe de altă parte $\overline{ab} \geq 99 \implies \overline{ab} + 36 \geq 99 + 36 = 135$. Numerele care verifică condițiile problemei sunt $100, 101, 102, \cdots, 135$ și sunt în total $\boxed{36}$.

Răspuns corect: $\boxed{36}$ .... $5p$

□

Problema 9

La înmulțirea a două numere naturale, din neatenție, Rob schimbă ordinea cifrelor unuia dintre ele. Știind că numărul pe care l-a scris greșit are două cifre și că rezultatul obținut este 161, care era, de fapt, rezultatul corect?

Demonstrație.
Pentru că $161 = 7 \cdot 23$, iar în acest produs singurul număr de două cifre este 23. Asta înseamnă că produsul pe care ar fi trebuit să îl calculeze Rob este $7 \cdot 32 = \boxed{224}$.

Răspuns corect: $\boxed{224}$ .... $5p$

□

Problema 10

S este suma a două numere naturale de câte două cifre fiecare. Dacă toate cele patru cifre ale acestor două numere sunt distincte, care este cea mai mică valoare a sumei cifrelor numărului S?

Demonstrație.
Suma a două numere de câte două cifre fiecare este un număr de două cifre sau unul de trei cifre. Suma cifrelor minimă se obține pentru 100. Un exemplu este $100 = 26 + 74$. Deci, suma minimă este $\boxed{1}$.

Răspuns corect: $\boxed{1}$ .... $5p$

□

Problema 11

Doctorul i-a recomandat veveriței o cură de slăbire. Zilnic poate să mănânce:

- fie 7 alune
- fie 3 alune și 2 nuci
- fie 4 nuci

Află câte nuci a mâncat săptămâna trecută, când a avut în meniu 27 de alune.

Demonstrație.
Facem următoarele notații:

- $x =$ numărul de zile în care mănâncă 7 alune;
- $y =$ numărul de zile în care mănâncă 3 alune și 2 nuci;
- $y =$ numărul de zile în care mănâncă 4 nuci.

Atunci numărul total de alune mâncate este $7x + 3y = 27$. Analizăm în continuare următoarele cazuri posibile:

- **Cazul 1:** $x = 0 \implies 0 + 3y = 27 \implies y = 9$. Dar $y \leq 7$ pentru că o săptămână are 7 zile. Nu reținem soluții în acest caz.
- **Cazul 2:** $x = 1 \implies 7 + 3y = 27 \implies 3y = 20$. Nu reținem soluții în acest caz.
- **Cazul 3:** $x = 2 \implies 14 + 3y = 27 \implies 3y = 13$. Nu reținem soluții în acest caz.
- **Cazul 4:** $x = 3 \implies 21 + 3y = 27 \implies y = 2 \implies z = 7 - x - y = 2$.

Așadar, veverița a mâncat $2y + 4z = 4 + 8 = \boxed{12}$ nuci.

Răspuns corect: $\boxed{12}$ .... $5p$

□

Problema 12

Câte numere naturale cuprinse între 6000 și 7000 au produsul cifrelor diferit de zero?

Demonstrație.
Numerele care verifică cerințele problemei sunt de forma $\overline{6abc}$, unde a, b, c sunt cifre nenule. Fiecare cifră poate lua 9 valori și, conform Principiului produsului, găsim $9^3 = \boxed{729}$ numere care au produsul cifrelor nenul.

Răspuns corect: $\boxed{729}$ .... $5p$

□

Problema 13

Întrebat fiind ce vârstă are mama sa, Kole a răspuns: "Vârsta mamei este suma a două numere naturale nenule distincte. Fiecare dintre cele două numere se comportă astfel la împărțirea prin 9, respectiv prin 3: dacă la împărțirea prin 9 se obțin câtul c și restul r atunci la împărțirea prin 3 se obțin câtul r și restul c." Aflați ce vârstă are mama lui Kole.

Demonstrație.
Vom nota cu a și b cele două numere care însumate dau vârsta mamei lui Kole.
$a = 9c + r$, $0 \le r < 9$, $a = 3r + c$, $0 \le c < 3 \implies 9c + r = 3r + c \implies r = 4c \implies a = 13c$.
Numerele sunt nenule și avem doar cazurile $c = 1$, respectiv $c = 2$, de unde obținem că cele două numere sunt 13, respectiv 26. Vârsta mamei este $13 + 26 = \boxed{39}$.

Răspuns corect: $\boxed{39}$ 5p

□

Problema 14

Diferența dintre un număr natural de trei cifre $\overline{abc}$, $a > b > c$, și răsturnatul său este un număr natural format cu cifrele a, b și c.

$$\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{xyz}, \quad \{a, b, c\} = \{x, y, z\}.$$

Care este suma cifrelor numărului $\overline{abc}$?

Demonstrație.
$\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{xyz} \implies 99 \cdot (a - c) = \overline{xyz}$. Dar $a - c$ este o cifră și pentru o cifră nenulă k are loc relația $99 \cdot k = (100 - 1) \cdot k = \overline{k00} - k = \overline{(k-1)9(10-k)} \implies y = 9$. Cum una dintre cifre este 9, iar a este cea mai mare cifră obținem că $a = 9$ și relația de mai sus se rescrie $99 \cdot (9 - c) = \overline{x9z}$.

- **Cazul 1:** $x = b \implies 891 - 99c = 100b + 90 + c \iff 801 = 100b + 100c = 100(b + c)$. Nu reținem soluții în acest caz.
- **Cazul 2:** $x = c \implies 891 - 99c = 100c + 90 + b \iff 801 = 199c + b$. Pentru că $b \le 8 \implies c \ge 4$. Dar $199c < 801 \implies c \le 4$. Așadar $c = 4$ și $b = 5 \implies \overline{abc} = 954$.

Suma cifrelor numărului $\overline{abc}$ este $a + b + c = \boxed{18}$

Răspuns corect: $\boxed{18}$ 5p

□

Problema 15

Luca și Kole sunt doi prieteni pasionați de matematică. Luca îl provoacă pe Kole cu o problemă de vacanță:
"Am ales patru numere naturale distincte nenule și le-am adunat două câte două, obținând astfel șase valori diferite. Cele mai mici dintre ele sunt 5, 6, 7, 9 și 10. Poți s-o afli pe cea de-a șasea, care este și cea mai mare dintre ele?".
Kole s-a descurcat de minune și a găsit răspunsul corect. Care este acesta?

Demonstrație.
Notez cele patru numere, în ordine crescătoare, cu a, b, c și d, iar $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$ și $c+d$ sunt egale cu $5, 6, 7, 9, 10$ și y. Adunând cele șase relații obținem $3(a+b+c+d) = 37 + y$. Cele mai mici două numere sunt $a + b < a + c$, iar cele mai mari sunt $b + d < c + d$. Prin urmare, $a + c = 6$ și $b + d = 10 \implies a + b + c + d = 16 \implies y = \boxed{11}$.

Răspuns corect: $\boxed{11}$ 5p

□

Problema 16

Spunem despre un număr b că este fratele lui a dacă se obține din a prin schimbarea ordinii cifrelor acestuia. De exemplu, frații lui 123 sunt: 132, 213, 231, 312 si 321.
Câți frați are numărul $a = 10^{111} - 12$?

Demonstrație.
$a = \underbrace{999.......9}_{109\text{cifre}}88$, iar pentru a afla frații lui a trebuie să aflăm în câte moduri distincte putem așeza cele două cifre de 8. Asta revine la afla câte grupe de câte două numere putem alege din numerele $1, 2, 3, \cdots, 111$. Numărul 1 poate fi pus în grupă cu oricare dintre celelalte 110 numere diferite de el, numărul 2 poate fi pus în grupă cu oricare dintre celelalte 110 numere diferite de el, și așa mai departe. Însă, fiecare grupă a fost numărată de două ori, prin urmare trebuie să împărțim rezultatul la 2. Găsim astfel $111 \cdot 110 : 2 = 6105$ moduri de distribuire pentru cele două cifre de 8. Însă a nu este frate pentru el însuși și trebuie să îl eliminăm din total. Au rămas $6105 - 1 = \boxed{6104}$ frați pentru numărul a.

Soluție alternativă :
Vom număra mai întâi câte numere naturale de 111 cifre se formează cu 109 cifre de 9 și două cifre egale cu 8.
Fixăm o cifră de 8 pe ultima poziție, iar a doua cifră poate ocupa celelalte 110 locuri. Obținem astfel 110 numere. Apoi, mutăm cifra de la coada numărului pe penultima poziție și pe a doua o mutăm în față pe cele 109 locuri. Nu o mai așezăm pe ultima poziție pentru că am număra încă o dată numărul $\underbrace{999...9}_{109\text{cifre}}88$. Continuăm raționamentul și vom găsi încă 108 numere, încă 107 numere, ultimul pe care îl putem forma astfel fiind $88\underbrace{999...99}_{109\text{cifre}}$.

Am obținut astfel $1 + 2 + 3 + ... + 110 = (1 + 110) \cdot 110 : 2 = 6105$ numere din care îl vom scădea pe a pentru că a nu este frate cu el însuși.

Răspuns corect: $\boxed{6104}$ 5p

□

Problemele 1-16: . . . . $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: 20p
Total: 100p