

Concursul de Matematica Upper.School, editia 2021



Se adreseaza copiilor din clasele **V, VI, VII, VIII**

3 etape

- **12 februarie 2021 – etapa I (de calificare)**, intre orele **8:00** si **20:00**

Din momentul inceperii participantul are **2 ore** la dispozitie
Nivel de dificultate similar cu etapa **locala** a ONM

- **5 martie 2021 – etapa II (de calificare)**, intre orele **8:00** si **20:00**

Din momentul inceperii participantul are **3 ore** la dispozitie
Nivel de dificultate similar cu etapa **judeteana** a ONM

- **27 martie 2021 – etapa III (finala)**

Concursul se desfasoara intre orele **10:00** si **13:00** pentru clasele **V** si **VI**
si intre orele **10:00** si **14:00** pentru clasele **VII** si **VIII**
Nivel de dificultate similar cu etapa **nationala** a ONM

Pentru inscriere accesati link-ul <https://upper.school/concursuri>

Inscrierea are loc pana la data de **12 februarie 2021**



UPPER.SCHOOL

Platforma software personalizata, echipa de dezvoltare software dedicata

LEARN MORE, GET UPPER

<https://upper.school>

Concursul de matematică Upper.School Ediția 2021

Etapa II Clasa a-VI-a

- Soluții -

**Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu,
Robert Dragomirescu**

§1 Soluții

Problema 1

Într-un bazin sunt 72 de pești, unii mari și alții mici. Fiecare pește mare mănâncă exact doi pești mici, astfel încât în bazin rămân doar pești mari. După ce în bazin rămân doar pești mari, se introduc în bazin câțiva pești uriași, care mănâncă fiecare exact trei pești mari, așa încât în bazin rămân doar pești uriași. Câți pești uriași au rămas în bazin?

Demonstrație.

Numărul peștilor mari este de două ori mai mic decât numărul peștilor mici, prin urmare reprezintă o treime din numărul peștilor care erau la început în bazin. Asta înseamnă 24 de pești mari. Fiecare pește uriaș mănâncă câte trei pești mari, de unde obținem concluzia că numărul peștilor uriași este de trei ori mai mic față de numărul peștilor mari. În bazin au rămas 8 pești uriași.

Răspuns corect: 8 5p

□

Problema 2

O pereche de numere strict pozitive (a, b) se transformă după un pas în perechea $\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right)$.

Care este numărul minim de pași succesivi după care, din perechea $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ se ajunge la o pereche (p, q) cu $p + q > 2021$?

Demonstrație.

O pereche $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ se transformă după un pas în perechea $\left(a^2, \frac{1}{a^2}\right)$.

Astfel $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ trece în $\left(2^2, \frac{1}{2^2}\right)$, aceasta în $\left(2^4, \frac{1}{2^4}\right)$, apoi în $\left(2^8, \frac{1}{2^8}\right)$ și în final se ajunge la $\left(2^{16}, \frac{1}{2^{16}}\right)$. Aceasta este prima pereche pentru care suma celor două numere este mai mare decât 2021 și s-a ajuns la ea după 4 pași.

Răspuns corect: 4 5p

□

Problema 3

Câte numere de forma a^a nu sunt pătrate perfecte, unde $a \in \mathbb{N}$, $1 \leq a \leq 2021$?

Demonstrație.

Un număr de forma a^a este pătrat perfect dacă:

- a este număr par pentru că în acest caz $a = 2k$ și $a^a = ((2k)^k)^2$;
- a este pătratul unui număr impar, adică $a = (2k+1)^2$ și $a^a = ((2k+1)^a)^2$.

Numerele pare sunt 2, 4, 6, ..., 2020, adică 1010 numere, iar pătratele perfecte impare sunt $1^2, 3^2, 5^2, \dots, 43^2$ un total de $1010 + 22 = 1032$. Din cele 2021 numere naturale nenule le scădem pe cele care nu convin și obținem rezultatul 989.

Răspuns corect: 989 5p

□

Problema 4

În căsuțele unui pătrat cu 3 linii și 3 coloane se scriu toate numerele naturale de la 1 la 9. Calculăm suma numerelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană. Obținem astfel 6 sume. Care este numărul maxim de numere prime pe care îl putem găsi printre aceste sume?

Demonstrație.

Este posibil să obținem 6 numere prime, câte unul pe fiecare linie și coloană, așa cum se vede în tabelul alăturat.

2	1	8
9	3	5
6	7	4

Observație:

Am acceptat contestațiile care se referă la un alt mod în care poate fi interpretată această problemă. Într-adevăr, nu este clar dacă un număr prim care apare de mai multe ori printre cele 6 sume se numără o singură dată sau de fiecare dată. În cazul în care ne interesează numărul maxim de numere prime diferite, vom avea în vedere următoarele aspecte:

- Cea mai mică sumă posibilă este $1 + 2 + 3 = 6$.
- Cea mai mare sumă posibilă este $7 + 8 + 9 = 24$.
- Numerele prime între 6 și 24 sunt 7, 11, 13, 17, 19 și 23
- Suma tuturor numerelor din pătrat este 45, dar 45 nu poate fi scris ca suma a 3 numere prime diferite cuprinse între 6 și 24.

Prin urmare, putem avea maxim 2 numere prime diferite pe coloane și 2 numere prime diferite pe linii, iar numărul maxim de numere prime diferite este $2 + 2 = \boxed{4}$. Un exemplu de completare este prezentat în figura de mai jos:

2	1	4	7
6	3	8	17
5	7	8	20
13	11	20	

În aceste condiții se va acorda punctaj maxim pentru răspunsurile 4 și 6.

Răspuns corect: 6 5p

Răspuns corect: 4 5p

□

Problema 5

Un unghi obtuz are măsura exprimată printr-un număr natural. Două semidrepte interioare cu originea în vârful unghiului îl împart în trei unghiuri cu măsurile (exprimate în grade și minute): $a^\circ b'$, $b^\circ c'$ și $c^\circ a'$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Care este măsura unghiului inițial?

Demonstrație.

Pentru că măsura este un număr natural suma $a + b + c$ este un număr întreg de grade și pentru că fiecare este mai mic decât 60° atunci $a + b + c \in \{60^\circ, 120^\circ\}$. Dacă $a + b + c = 60^\circ$ atunci măsura unghiului ar fi de 61° , dar aceasta nu este măsura unui unghi obtuz, iar dacă $a + b + c = 120^\circ$ atunci măsura unghiului este de $\boxed{122^\circ}$.

Răspuns corect: $\boxed{122}$ 5p

□

Problema 6

Care este valoarea numărului natural n pentru care cel mai mic multiplu comun al numerelor n și 56 este cu 721 mai mare decât cel mai mare divizor comun al numerelor n și 56?

Demonstrație.

Avem de rezolvat ecuația $[56, n] = 721 + (56, n)$. Pentru că cel mai mare divizor comun este divizor pentru cel mai mic multiplu comun obținem că $(56, n) | 721$, iar $(56, n) | 56$. Divizorii comuni ai lui 721 și 56 sunt 1 și 7. În plus $[56, n] : 7, 721 : 7 \implies (56, n) : 7$. Avem o singură variantă pentru cel mai mare divizor comun, $(56, n) = 7$. Ecuația este echivalentă cu $[56, n] = 728$ și $(56, n) = 7 \implies n = \boxed{91}$.

Răspuns corect: $\boxed{91}$ 5p

□

Problema 7

Numerele naturale nenule a, b, c verifică egalitatea

$$\frac{a^2 + a}{2} + \frac{b^2 + b}{2} = \frac{c + 3}{c + 1}.$$

Care este valoarea numărului a^{b+c} ?

Demonstrație.

Produsele $a(a+1)$ și $b(b+1)$ sunt pare (ca produs de numere consecutive) prin urmare

$$\frac{a^2 + a}{2} + \frac{b^2 + b}{2} \in \mathbb{N} \implies \frac{c + 3}{c + 1} \in \mathbb{N} \implies c + 1 | c + 3 \implies c + 1 | 2 \implies c + 1 \in \{1, 2\} \implies$$

$c \in \{0, 1\}$. Dar c este nenul și de aici obținem soluția unică $c = 1$ și $\frac{a(a+1)}{2} = \frac{b(b+1)}{2} = 1 \implies a = b = 1$. Valoarea numărului a^{b+c} este $\boxed{1}$.

Răspuns corect: $\boxed{1}$ 5p

□

Problema 8

Câte perechi de numere naturale (x, y) sunt soluții ale ecuației $x^{2021} = y^x$, dacă x este un număr prim și y este un număr natural pozitiv?

Demonstrație.

Pentru că x este număr prim obținem că $y = x^k$, iar ecuația se rescrie $x^{2021} = x^{xk} \iff xk = 2021 \implies x = 43$ și $y = 43^{47}$ sau $x = 47$ și $y = 47^{43}$. Numărul perechilor (x, y) este egal cu $\boxed{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{2}$ 5p

□

Problema 9

Ana are 24 de acadele. În câte moduri le poate împărți cu Bogdan și Cristi astfel încât fiecare copil să aibă cel puțin două acadele?

Demonstrație.

Distribuind câte două acadele la fiecare copil, Ana rămâne cu 18 acadele pe care trebuie să le împartă. Notăm cu a, b, c numărul de acadele pe care le poate primi fiecare copil după ce fiecare a primit câte două. Asta revine la a găsi numărul de triplete ordonate (a, b, c) care sunt soluții ale ecuației $a + b + c = 18$.

Pentru $a = 0 \implies (b, c) \in \{(0, 18), (1, 17), (2, 16), \dots, (18, 0)\}$.

Pentru $a = 1 \implies (b, c) \in \{(0, 17), (1, 16), (2, 15), \dots, (17, 0)\}$.

Continuând raționamentul ajungem la $a = 18$ și $(b, c) \in \{(0, 0)\}$.

În total avem $1+2+3+\dots+19 = \frac{19 \cdot 20}{2} = \boxed{190}$ variante.

Răspuns corect: $\boxed{190}$ 5p

□

Problema 10

Șapte prieteni au obținut ca punctaj la Olimpiada de matematică doar numere naturale nenule și cel puțin doi dintre ei au primit note diferite. Știind că suma punctajelor este 49, aflați care este cel mai mare divizor comun al notelor obținute la olimpiadă de cei șapte copii.

Demonstrație.

Notez punctajele cu $p_1, p_2, \dots, p_7$ și cel mai mare divizor comun cu d . Se obțin relațiile $d \mid (p_1 + p_2 + \dots + p_7) \implies d \mid 49 \implies d \in \{1, 7, 49\}$. Dar d nu poate fi egal cu 49 pentru că fiecare dintre numere este mai mic strict decât 49. Dacă $d = 7$ obținem că toți copiii au obținut același punctaj, imposibil. Singurul caz convenabil este $d = \boxed{1}$.

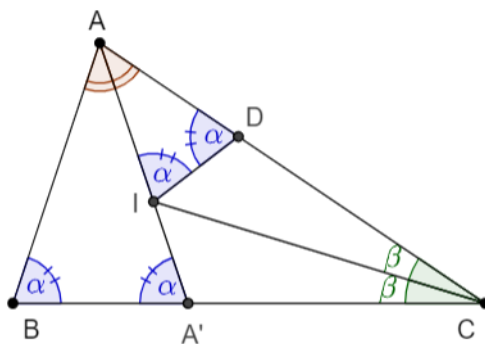
Răspuns corect: $\boxed{1}$ 5p

□

Problema 11

În triunghiul ABC se construiește bisectoarea (AA' , $A' \in (BC)$) și fie I punctul de intersecție al bisectoarelor $\triangle ABC$. Dacă $\frac{m(\angle BAC)}{4} + m(\angle ABC) = 90^\circ$, iar valoarea raportului $\frac{AI + A'C}{AC} = \frac{m}{n}$, unde $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $(m, n) = 1$, atunci valoarea sumei $m + n$ este egală cu:

Demonstrație.



În triunghiul $\triangle ABA'$ avem:

$$\begin{aligned} m(\angle AA'B) &= 180^\circ - \left(m(\angle B) + \frac{m(\angle A)}{2} \right) = \\ &= 180^\circ - \left(m(\angle B) + \frac{m(\angle A)}{4} + \frac{m(\angle A)}{4} \right) = 90^\circ - \frac{m(\angle A)}{4}, \end{aligned}$$

iar din ipoteză $m(\angle B) = 90^\circ - \frac{m(\angle A)}{4}$. Deducem de aici că

$$m(\angle ABA') = m(\angle AA'B) = \alpha.$$

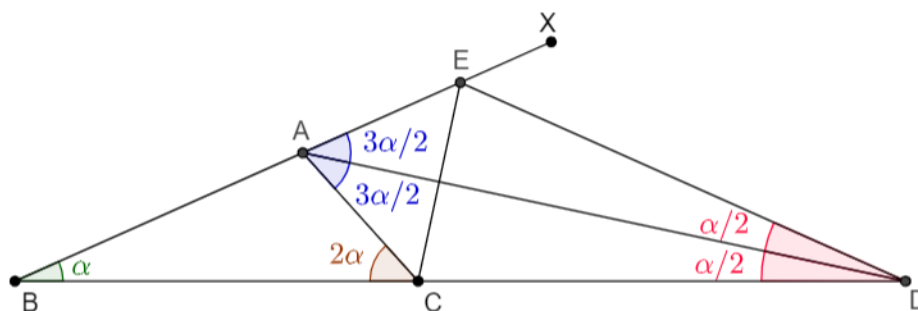
Fie $D \in [AC]$ astfel încât $AI = AD$. În triunghiul isoscel $\triangle AID$ avem că $\angle DAI \equiv \angle BAA'$. Atunci $m(\angle ADI) = m(\angle AID) = \alpha$. Observăm că triunghiurile $\triangle A'IC$ și $\triangle DIC$ sunt congruente pentru că (IC) este latură comună, $m(\angle A'CI) = m(\angle DCI) = \beta$, și $m(\angle A'IC) = m(\angle DIC) = \alpha - \beta$. De aici obținem că $A'C = DC$ și cum $AI = AD$ avem că $AC = AD + DC = AI + A'C$, iar valoarea raportului cerut este $\frac{1}{1}$. Valoarea cerută este egală cu $\boxed{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{2}$ 5p □

Problema 12

În triunghiul $\triangle ABC$ știm că $AB = 7 \text{ cm}$, $AC = 5 \text{ cm}$ și $m(\angle ACB) = 2m(\angle ABC)$. Pe semidreapta opusă semidreptei (AB) considerăm un punct X , astfel încât $A \in (BX)$, iar (AD) este bisectoarea unghiului $\angle CAX$, $D \in BC$. Care este lungimea segmentului (CD) ?

Demonstrație.



Fie $E \in (AX)$ astfel încât $AE = AC$.

$\triangle ACD \equiv \triangle AED \Rightarrow CD = ED \Rightarrow D$ aparține mediatoarei segmentului (CE) , dar și A aparține mediatoarei segmentului (CE) , de aici rezultă că AD este mediatoarea segmentului (EC) , iar $\triangle AEC$ este un triunghi isoscel de bază (CE) și $\triangle DEC$ este triunghi isoscel de aceeași bază.

Din teorema unghiului exterior rezultă că $m(\angle CAE) = 3\alpha$.

În triunghiul isoscel $\triangle ACE$ liniile importante corespunzătoare bazei coincid, de aici rezultă că (AD) este bisectoarea $\angle CAE \Rightarrow m(\angle CAD) = \frac{3\alpha}{2}$. Pe de altă parte $\angle ACD$ este suplementul unghiului $\angle ACB \Rightarrow m(\angle ACD) = 180^\circ - 2\alpha$. Calculăm măsura unghiului $\angle ADC$ în $\triangle ACD$ și obținem că $m(\angle ADC) = \frac{\alpha}{2}$.

Am demonstrat că $\triangle DCE$ este isoscel de bază $(CE) \Rightarrow (DA)$ este bisectoarea unghiului $\angle CDE \Rightarrow m(\angle CDE) = \alpha = m(\angle ABC) \Rightarrow \triangle BED$ este isoscel cu $(EB) \equiv (ED)$. Dar și $(ED) \equiv (CD) \Rightarrow DC = \boxed{12} \text{ cm}$.

Răspuns corect: $\boxed{12}$ 5p

□

Problema 13

Fie A o mulțime formată din 1011 numere naturale. Considerăm mulțimea S formată din sumele a câte două elemente, nu neapărat distincte, din mulțimea A . Care este numărul minim de elemente al mulțimii S ?

Demonstrație.

Fie $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{1011}\}$ și, fără a restrânge generalitatea, le ordonăm $a_1 < a_2 < \dots < a_{1011}$. Obținem șirul de inegalități $2a_1 < a_1 + a_2 < 2a_2 < a_2 + a_3 < 2a_3 < \dots < a_{1010} + a_{1011} < 2 \cdot a_{1011}$. Un exemplu se obține pentru mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 1011\}$, iar în acest caz $S = \{2, 3, 4, \dots, 2022\}$. Numărul minim de elemente al mulțimii S este $\boxed{2021}$.

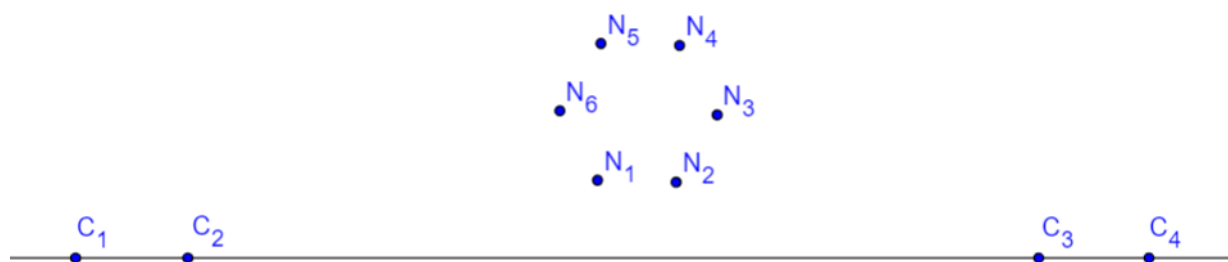
Răspuns corect: $\boxed{2021}$ 5p

□

Problema 14

Se dau 10 puncte distincte, patru dintre ele coliniare, iar celelalte șase oricare trei necoliniare. Care este numărul maxim al dreptelor determinate de cele 10 puncte?

Demonstrație.



Notăm cu $C_i, i = \overline{1, 4}$ punctele coliniare și cu $N_i, i = \overline{1, 6}$ punctele necoliniare. Pentru a obține numărul maxim de drepte trebuie ca printre punctele N_i să nu găsim două care să fie coliniare cu un punct C_i . În acest caz cele 4 puncte coliniare determină o dreaptă. Punctele N_i determină 15 drepte distincte ($N_1N_2, N_1N_3, N_1N_4, \dots, N_5N_6$). În final numărăm dreptele N_iC_j , care sunt în număr de 24 (fiecare punct N_i determină o altă dreaptă cu fiecare punct C_j). Numărul maxim de drepte este $1 + 15 + 24 = \boxed{40}$.

Răspuns corect: $\boxed{40}$ 5p

□

Problema 15

Suma a cinci numere naturale nenule este egală cu 2016. Notăm cu d cel mai mare divizor al celor 5 numere. Care este cea mai mare valoare posibilă pe care o poate lua d ?

Demonstrație.

Fie a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 cele cinci numere și $d = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$. Atunci $a_1 = dx_1, a_2 = dx_2, a_3 = dx_3, a_4 = dx_4, a_5 = dx_5$, cu $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 1$. Cum suma lor este egală cu 2016 obținem $d(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Pentru ca d să fie cât mai mare trebuie ca $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ să fie cât mai mic. Numerele sunt nenule și $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 5$. Dar 5 nu este divizor al lui 2016 și atunci cea mai mică valoare posibilă pentru $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ este 6. Obținem $d = \boxed{336}$.

Răspuns corect: $\boxed{336}$ 5p

□

Problema 16

Mulțimea A are 29 de submulțimi cu mai puțin de 3 elemente. Câte submulțimi cu 6 elemente are mulțimea A ?

Demonstrație.

Fie n numărul de elemente al mulțimii A . O submulțime este mulțimea vidă, celelalte 28 având 1 sau 2 elemente. Un element îl putem alege în n moduri distincte, astfel numărul submulțimilor de cardinal 1 este n . Vom număra submulțimile de câte două elemente. Fiecare element poate fi ales împreună cu oricare altul și se formează $n \cdot (n - 1)$ perechi, dar pentru că într-o mulțime nu este importantă ordinea elementelor trebuie să împărțim la 2. Astfel, $n + \frac{n(n-1)}{2} = 28 \iff n(n+1) = 56$ cu soluția naturală unică $n = 7$.

Pentru a obține o submulțime de 6 elemente trebuie să eliminăm câte un element, iar asta se poate face în 7 moduri. Mulțimea A are $\boxed{7}$ submulțimi a câte 6 elemente.

Răspuns corect: $\boxed{7}$ 5p

□

Problemele 1-16:		$16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu:		$20p$
Total:		$100p$