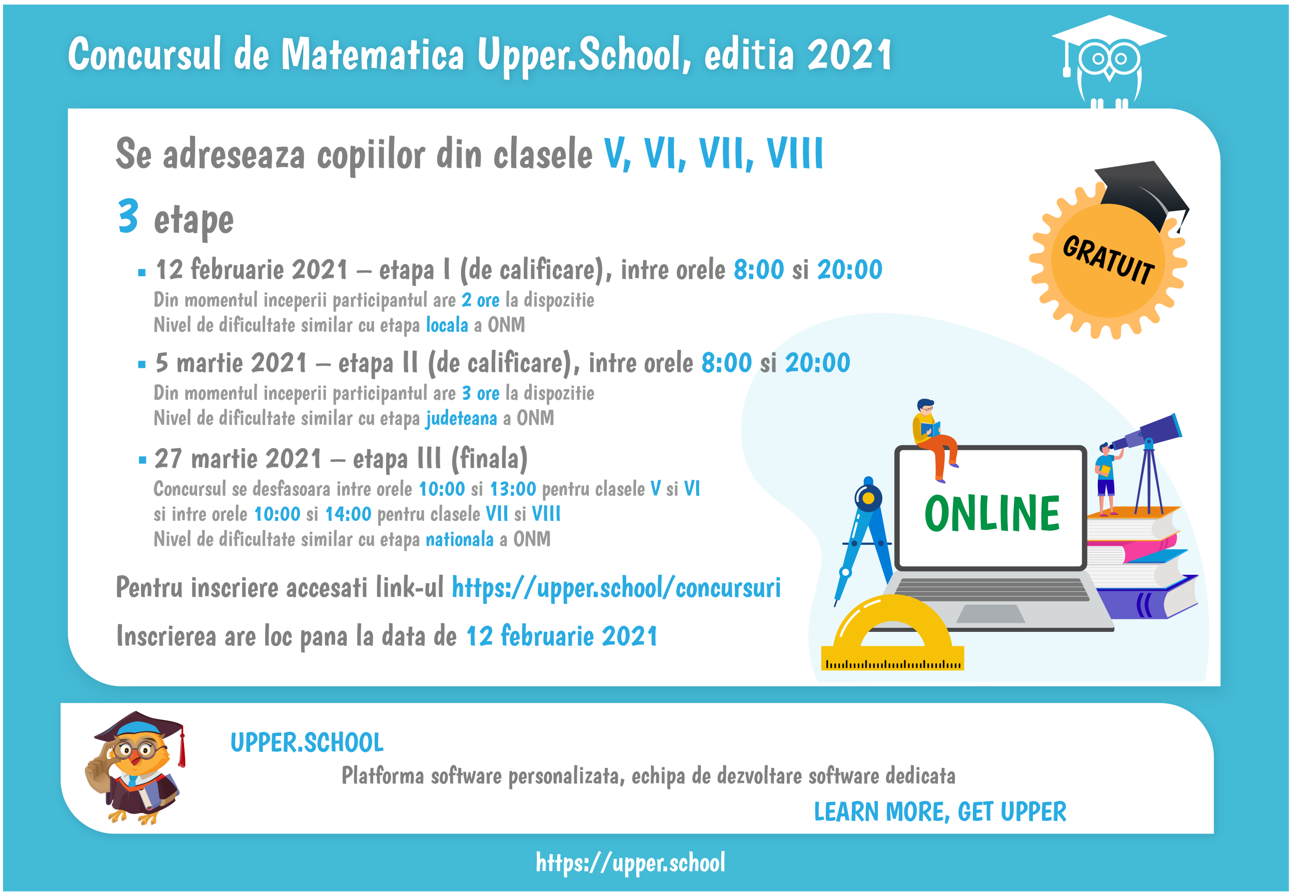


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2021

Etapa II
Clasa a-VII-a

- Soluții -

Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu,
Robert Dragomirescu

§1 Soluții

Problema 1

Fie $a_1, a_2, \cdots, a_9 \in \{-1, 1\}$. Câte valori poate lua expresia:

$$| a_1 + a_2 + a_3 | + | a_4 + a_5 + a_6 | + | a_7 + a_8 + a_9 |?$$

Demonstrație.
$|a_1 + a_2 + a_3| \in \{1, 3\}$. Valoarea 1 se obține când există două numere opuse și valoarea 3 atunci când toate sunt egale. Expresia poate lua valorile 3, 5, 7 și 9. În total sunt $\boxed{4}$ valori.

Răspuns corect: $\boxed{4}$ .... $5p$

□

Problema 2

Care este numărul soluțiilor întregi ale ecuației:

$$| 17x + 13y | - | 11x - 13y |= 99?$$

Demonstrație.
Pentru că $17x$ și $11x$ au aceeași paritate rezultă că $17x + 13y$ și $11x - 13y$ au aceeași paritate, iar de aici diferența lor este număr par. Cum 99 este număr impar ecuația dată are $\boxed{0}$ soluții.

Răspuns corect: $\boxed{0}$ .... $5p$

□

Problema 3

Fie $A = \{x \in \mathbb{Z}/| x |< 2n - 1\}$. Care este valoarea numărului întreg n, știind că mulțimea A are 2021 de elemente?

Demonstrație.
Este evident că $2n - 1 > 0$. Numerele care verifică inegalitatea sunt toate numerele întregi consecutive de la $-2n+2$ până la $2n-2 \implies 2n-2 = 1010 \iff n = \boxed{506}$. Cele 2021 numere sunt $-1010, -1009, ..., +1009, +1010$.

Răspuns corect: $\boxed{506}$ .... $5p$

□

Problema 4

Perechile (x, y) de numere întregi sunt soluții ale inecuației $| x + 2 | + | y - 7 |\leq 1$. Pentru fiecare astfel de pereche Luca calculează suma $x^2 + y^2$. Care este cea mai mică valoare pe care o obține Luca?

Demonstrație.
$|x + 2| + |y - 7| \leq 1 \implies |x + 2| = 0$ și $|y - 7| = 1$ sau $|x + 2| = 1$ și $|y - 7| = 0$ sau ambele egale cu 0.
Solutiile sunt $(x, y) \in \{(-2, 6), (-2, 8), (-3, 7), (-1, 7), (-2, 7)\}$. Valorile pe care le obtine Luca sunt 40, 50, 53, 58, 68. Cea mai mică dintre valori este $\boxed{40}$.

Răspuns corect: $\boxed{40}$ .... $5p$

□

Problema 5

Luca a încărcat pe contul personal de Facebook $2n+7$ fotografii din vacanță, iar Andrei $11n+8$. Din aceste postări băieții au ales $(n+1)^2+(n+2)^2+n!$ imagini pe care le-au trimis la un concurs de fotografi amatori. Știind că atât numărul pozelor încărcate pe contul personal al fiecărui băiat, cât și numărul n sunt numere prime aflați câte fotografii au trimis băieții la concurs.

Demonstrație.
Numerele n, $2n+7$ și $11n+8$ sunt prime. Pentru $n=2$, $11n+8=30$ care nu este prim. pentru $n=3$, 13 și 41 sunt prime.

Pentru $n>3$, $3\nmid n$. Dacă $n=3k+1$, atunci $3\mid 2n+7=6k+9$, fals. Dacă $n=3k+2$, atunci $3\mid 11n+8=33k+30$, imposibil.

Pentru $n=3$, avem $(n+1)^2+(n+2)^2+n!=16+25+6=\boxed{47}$

Răspuns corect: $\boxed{47}$ .... $5p$

□

Problema 6

Se dă mulțimea $A=\{x\in\mathbb{R}|3^{x+1}+9x-x\cdot 3^x=27\}$.
Care este suma elementelor mulțimii A?

Demonstrație.
$3^{x+1}+9x-x\cdot 3^x=27 \iff 3^x(3-x)+9x-27=0 \iff (3-x)(3^x-9)=0 \implies x=3$ sau $x=2$, iar suma celor două valori este $\boxed{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{5}$ .... $5p$

□

Problema 7

Câte perechi de numere întregi (x,y) verifică ecuația

$$x^{2020}+y^2=2y?$$

Demonstrație.
$x^{2020}+y^2=2y \iff x^{2020}+y^2-2y+1=1 \iff x^{2020}+(y-1)^2=1$. Cum $x,y\in\mathbb{Z}$ și $x^{2020}\geq 0$, $(y-1)^2\geq 0$ avem de analizat 2 cazuri:

- $x^{2020}=0$ și $(y-1)^2=1$. Obținem $x=0$ și $y-1\in\{-1,1\} \implies y\in\{0,2\} \implies (x,y)\in\{(0,0),(0,2)\}$. Reținem 2 perechi de soluții în acest caz.
- $x^{2020}=1$ și $(y-1)^2=0$. Obținem $y=1$ și $x\in\{-1,1\} \implies (x,y)\in\{(-1,1),(1,1)\}$. Reținem 2 perechi de soluții în acest caz.

În total avem $2+2=\boxed{4}$ perechi de numere întregi care verifică relația din enunț.

Răspuns corect: $\boxed{4}$ .... $5p$

□

Problema 8

$A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | y^2 = x^2 + 4x + 1\}$
Care este cardinalul mulțimii A?

Demonstrație.
$y^2 = x^2 + 4x + 1 \iff y^2 = (x+2)^2 - 3 \iff (x+2)^2 - y^2 = 3 \iff (x+2-y)(x+2+y) = 3$. Avem de analizat patru cazuri pentru că divizorii întregi ai lui 3 sunt $\pm 1, \pm 3$. Obținem $A = \{(0, 1), (0, -1), (-4, -1), (-4, 1)\}$ al cărei cardinal este egal cu $\boxed{4}$.
Răspuns corect: $\boxed{4}$ .... $5p$

□

Problema 9

Valoarea numărului real a pentru care ecuația $x^2 + y^2 - 14y = -a$ admite ca soluție o unică pereche de numere reale (x, y) este egală cu:

Demonstrație.
Dacă x este soluție atunci și $-x$ este o soluție. Pentru unicitate se impune ca $x = -x \iff x = 0$. Ecuația se rescrie $y^2 - 14y + 49 = -a + 49 \iff (y-7)^2 = -a + 49$, care admite soluție unică dacă și numai dacă $a = \boxed{49}$, iar soluția ecuației este $(0, 7)$.
Răspuns corect: $\boxed{49}$ .... $5p$

□

Problema 10

Pentru fiecare număr natural $\overline{abc}$ notăm cu

$$E(\overline{abc}) = |(a-b)(b-c)(c-a)|\,.$$

Determinați valoarea maximă a expresiei $E(\overline{abc})$.

Demonstrație.
Dacă numărul $\overline{abc}$ are cel puțin două cifre egale atunci $E(\overline{abc}) = 0$. Vom studia valorile expresiei numai pentru numerele de trei cifre diferite. $E(\overline{abc})$ este număr par pentru că dintre cele trei cifre ale numărului $\overline{abc}$ cel puțin două au aceeași paritate. Mai mult, numerele formate cu aceleași trei cifre dau aceeași valoare pentru expresie, motiv pentru care putem alege $a > b > c$ și atunci $E(\overline{abc}) = (a-b)(b-c)(a-c)$. Aplicăm inegalitatea mediilor și obținem $(a-b)(b-c) \leq \dfrac{(a-b)^2 + (b-c)^2}{2} = \dfrac{(a-c)^2 - 2(a-b)(b-c)}{2}$, inegalitate pe care o înmulțim cu $a-c$ și obținem $E(\overline{abc}) \leq \dfrac{(a-c)^3}{2} - E(\overline{abc})$. Cum a și c sunt cifre distincte avem $1 \leq a-c \leq 9$ și atunci $E(\overline{abc}) \leq \dfrac{9^3}{4}$, iar cum $E(\overline{abc})$ este număr natural obținem $E(\overline{abc}) \leq 182$.
Pentru 182, care are factorizarea $2 \cdot 7 \cdot 13$, nu găsim soluție, maximul este $\boxed{180}$ și se obține, de exemplu, pentru numerele 940 sau 950.
Răspuns corect: $\boxed{180}$ .... $5p$

□

Problema 11

Codul PIN al unui card este o secvență de 4 cifre. Aflați numărul de variante posibile ale codului știind că unele cifre se pot repeta și că primele trei cifre nu pot fi 207 sau 217. Prima cifră a unui cod poate fi chiar și zero.

Demonstrație.
Din numărul de variante pentru primele trei cifre ($10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$) se scad variantele excluse (2 variante: 207 și 217), deci pentru primele trei cifre rămân $1000 - 2 = 998$ variante. Pentru cea de-a patra cifră mai sunt 10 variante, deci numărul total de variante este $998 \cdot 10 = \boxed{9980}$

Răspuns corect: $\boxed{9980}$ .... $5p$

□

Problema 12

Fie (a, b, c, d) un cvadr-uplu ordonat de numere întregi, nu neapărat distincte, în care fiecare termen este element al mulțimii $\{0, 1, 2, 3\}$. Pentru câte astfel de cvadr-uple este adevărat că numărul $ad + bc$ este impar?

De exemplu, $(0, 3, 1, 1)$ este un astfel de cvadr-uplu pentru că $0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 3$, care este număr impar.

Demonstrație.
Cum $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ și $d \in \{0, 1, 2, 3\}$, în total sunt $4 \cdot 4 = 16$ variante pentru valorile posibile ale lui a și d. Observăm că ad este impar $\iff$ $a \in \{1, 3\}$ și $d \in \{1, 3\}$. Prin urmare sunt $2 \cdot 2 = 4$ variante astfel încât ad este impar și $16 - 4 = 12$ variante astfel încât ad este par.
Analog, obținem 4 variante astfel încât bc este impar și 12 variante astfel încât bc este par.
În final, $ad + bc$ este impar în una dintre următoarele 2 situații:

- ad impar, bc par. Reținem $4 \cdot 12 = 48$ variante în acest caz.
- ad par, bc impar. Reținem $12 \cdot 4 = 48$ variante în acest caz.

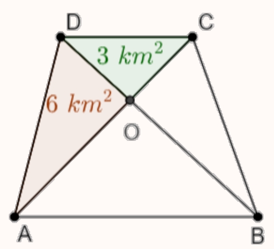
În total sunt $48 + 48 = \boxed{96}$ cvadr-uple pentru care numărul $ad + bc$ este impar.

Răspuns corect: $\boxed{96}$ .... $5p$

□

Problema 13

Evoluția unui aisberg de formă trapezoidală, care plutește în apele Mării Labradorului, este atent monitorizată prin satelit. S-au observat crăpături pe diagonalele trapezului și previziunea specialiștilor este că se vor desprinde curând bucățile triunghiulare $\triangle OAD$ și $\triangle OCD$. Suprafața $\triangle OAD$ este de 6 km^2, iar suprafața $\triangle ODC$ este de 3 km^2. Care este aria rămasă după desprinderea celor două sloiuri triunghiulare?



Demonstrație.

$$DC \parallel AB \implies A_{\triangle ABD} = A_{\triangle ABC}$$
$$A_{\triangle AOD} = A_{\triangle ABD} - A_{\triangle AOB}$$
$$A_{\triangle COB} = A_{\triangle ABC} - A_{\triangle AOB}$$
$$\implies A_{\triangle AOD} = A_{\triangle BOC} = 6$$
$$\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{A_{\triangle AOD}}{A_{\triangle DOC}} = \frac{6}{3} = 2$$
$$\frac{A_{\triangle AOB}}{A_{\triangle DOC}} = \frac{A_{\triangle AOB}}{A_{\triangle AOD}} \cdot \frac{A_{\triangle AOD}}{A_{\triangle DOC}} = \frac{OB}{OD} \cdot \frac{OA}{OC} = \frac{A_{\triangle OBC}}{A_{\triangle OCD}} \cdot \frac{A_{\triangle OAD}}{A_{\triangle OCD}} = \frac{6}{3} \cdot \frac{6}{3} = 4 \implies$$
$$A_{\triangle AOB} = 4A_{\triangle COD} = 4 \cdot 3 = 12\ km^2$$
$$A_{\triangle ABC} = A_{\triangle BOC} + A_{\triangle AOB} = 6 + 12 = \boxed{18}\ km^2$$

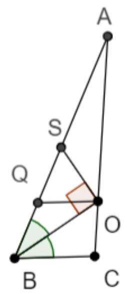
Răspuns corect: $\boxed{18}$ .... $5p$

□

Problema 14

În triunghiul $\triangle ABC$, $AB = 2016$, $(BO$ este bisectoarea unghiului $\angle ABC$, $O \in (AC)$ și S este mijlocul lui (AB). Aflați mărimea laturii (BC) știind că $m(\angle SOB) = 90°$

Demonstrație.



Fie Q mijlocul lui BS. Avem OQ mediană în triunghiul dreptunghic $\triangle BOS$. Avem $OQ = QB = QS$, deci $\triangle OQB$ este isoscel cu $\angle QOB = \angle OBQ$ și $\angle CBO = \angle OBQ$, deoarece $(BO$ este bisectoare. Prin urmare, $\angle CBO = \angle QOB$, deci $OQ \parallel BC$. Pentru că $QB = \frac{SB}{2} = \frac{AB}{4}$, vom avea $\frac{OQ}{BC} = \frac{AQ}{AB} = \frac{3}{4}$.

$$BC = \frac{4}{3}OQ = \frac{4}{3} \cdot \frac{BS}{2} = \frac{AB}{3} = \frac{2016}{3} = \boxed{672}$$

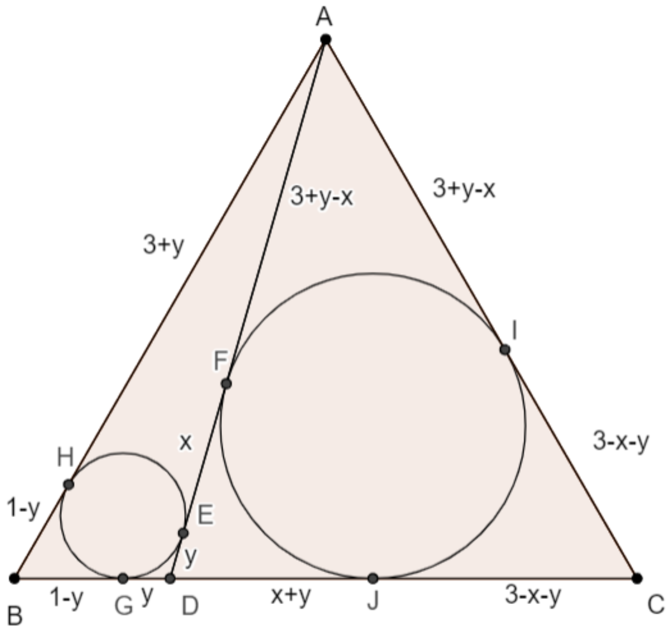
Răspuns corect: $\boxed{672}$ .... $5p$

□

Problema 15

Pe latura (BC) a triunghiul echilateral $\triangle ABC$ se consideră punctul D astfel încât $BD = 1$ cm și $DC = 3$ cm. Notăm cu E punctul de tangență al cercului înscris $\triangle ABD$ cu latura AD și cu F punctul de tangență al cercului înscris $\triangle ADC$ cu latura AD. Ce lungime are segmentul EF?

Demonstrație.



Lungimea laturii triunghiului echilateral este $BC = BD + DC = 4$ cm. Notăm cu G și H celelalte 2 puncte de tangență ale cercului circumscris $\triangle ABD$ și cu I și J celelalte 2 puncte de tangență ale cercului circumscris $\triangle ADC$, ca în figură.
Notăm cu x lungimea segmentului EF și cu y lungimea segmentului ED. Atunci:

$$BG = BD - GD = 1 - y \implies BH = 1 - y \implies HA = AB - BH = 4 - (1 - y) = 3 + y$$

$$\implies AE = AH = 3 + y \implies AF = AE - EF = 3 + y - x \implies AI = 3 + y - x.$$

Pe de alta parte

$$DJ = DF = x + y \implies JC = DC - DJ = 3 - x - y \implies CI = CJ = 3 - x - y.$$

În final obținem:

$$AC = AI + IC = 3 + y - x + 3 - x - y = 6 - 2x$$

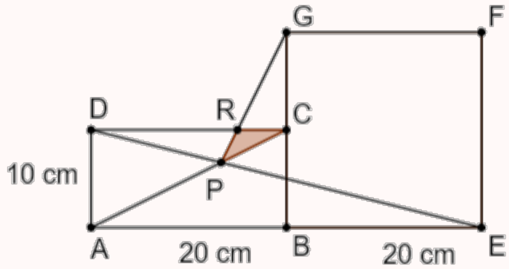
Dar $AC = 4 \implies 6 - 2x = 4 \implies x = \boxed{1}$

Răspuns corect: $\boxed{1}$ .... $5p$

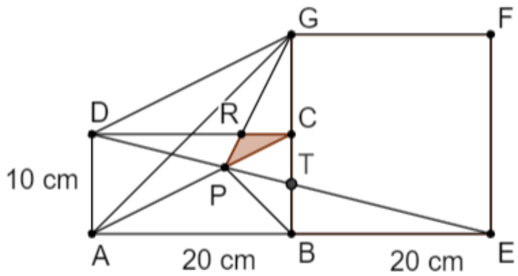
□

Problema 16

În figura de mai jos $ABCD$ este un dreptunghi cu $AB = 20\ cm$ și $BC = 10\ cm$, iar $BEFG$ este un pătrat cu $BE = 20\ cm$. Fie $AC \cap DE = \{P\}$ și $PG \cap CD = \{R\}$. Dacă aria $A_{PCR} = \dfrac{m}{n}$, unde $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $(m, n) = 1$, atunci valoarea sumei $m + n$ este egală cu:



Demonstrație.



$(DC) \equiv (BE)$ și $\angle CDT \equiv \angle BET \implies \triangle DCT \equiv \triangle BET$ (cazul C.U.) $\implies CT = BT = 5\ cm$. Din $CT \parallel AD$ aplicăm teorema fundamentală a asemănării și obținem $\triangle PCT \sim \triangle PAD \implies \dfrac{CT}{AD} = \dfrac{CP}{AP} = \dfrac{1}{2}$. În $\triangle AGB$ pentru că (AC) este mediană și $\dfrac{AP}{AC} = \dfrac{2}{3} \implies P$ este centrul de greutate. Rezultă că $A_{GPB} = \dfrac{A_{ABG}}{3} = \dfrac{200}{3}$, iar $A_{GPC} = \dfrac{A_{GPB}}{2} = \dfrac{100}{3}$ pentru că (PC) este mediană în $\triangle BPG$. Dar $ACGD$ este paralelogram pentru că $AD \parallel CG$ și $AD = CG \implies CP \parallel DG$ și din teorema fundamentală a asemănării obținem $\triangle RPC \sim \triangle RGD \implies \dfrac{CP}{DG} = \dfrac{PR}{RG}$. Dar $DG = AC \implies \dfrac{PR}{RG} = \dfrac{1}{3} \iff \dfrac{PR}{PG} = \dfrac{1}{4} \implies \dfrac{A_{CRP}}{A_{CPG}} = \dfrac{1}{4} \iff A_{CRP} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{100}{3} = \dfrac{25}{3} \implies m + n = \boxed{28}$.

Soluție alternativă: Notăm cu $\{T\} = DE \cap CB$. Pentru că $DC = BE$ și $\angle CDT \equiv \angle BET \implies \triangle DCT \equiv \triangle EBT \implies CT = BT = 5\ cm$. Aplicăm teorema lui Menelaus în $\triangle GPT$ cu transversala D-R-C $\implies \dfrac{GR}{RP} \cdot \dfrac{DP}{DT} \cdot \dfrac{TC}{CG} = 1 \iff \dfrac{GR}{RP} = 3$.

$A_{PCG} = \dfrac{d(P, CG) \cdot CG}{2} = \dfrac{100}{3}$, iar $\dfrac{A_{PCR}}{A_{PCG}} = \dfrac{PR}{PG} = \dfrac{1}{4} \implies A_{PCR} = \dfrac{25}{3} \implies m + n = \boxed{28}$.

Răspuns corect: $\boxed{28}$ .... $5p$

□

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$

Puncte acordate din oficiu: .... $20p$

Total: .... $100p$