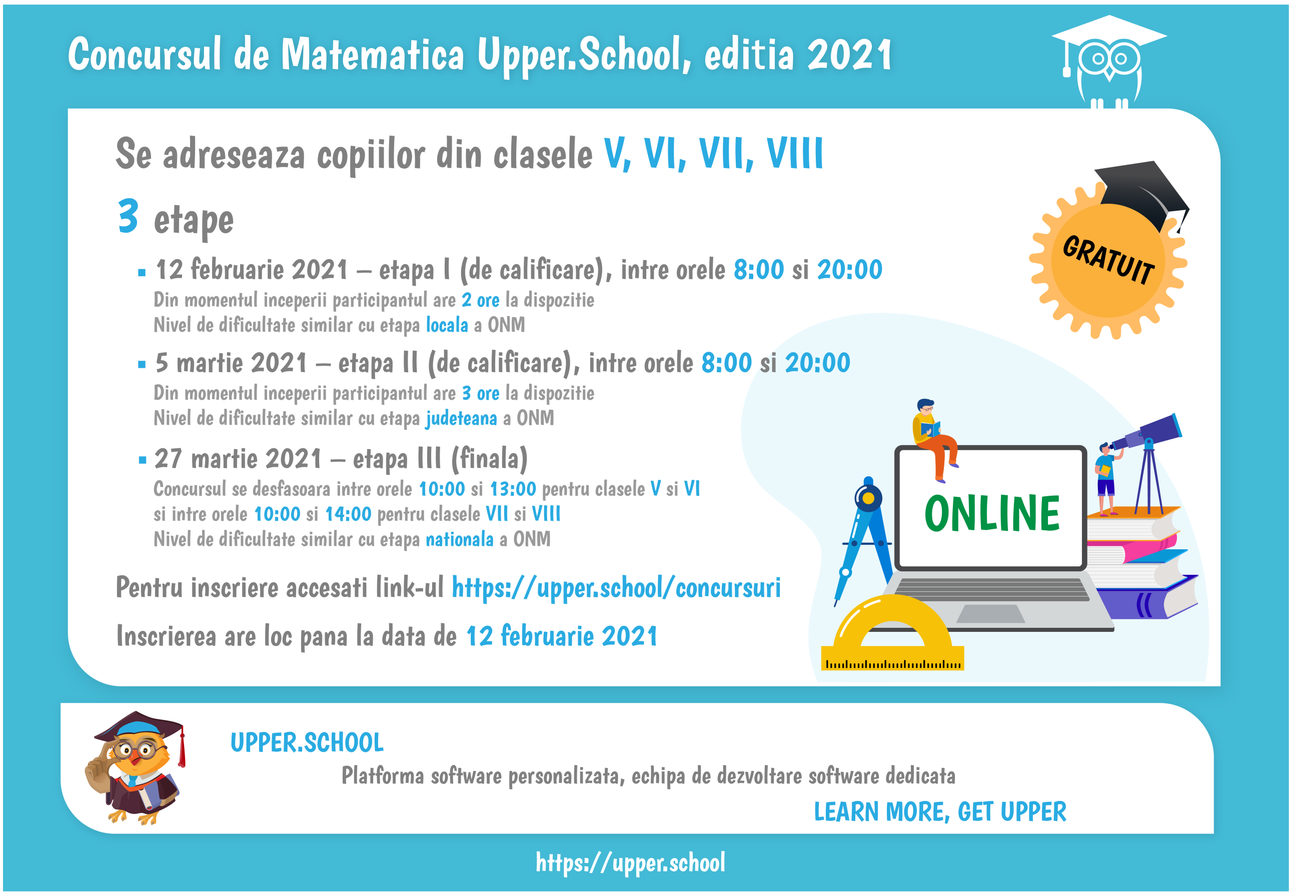


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2021

Etapa II
Clasa a-VIII-a

- Soluții -

Lioara Ivanovici, Mihaela Berindeanu, Robert Dragomirescu

§1 Soluții

Problema 1

Se dau numerele reale $x, y, z > 0$, care verifică relațiile:
$x = \sqrt{2 - 2yz}$
$y = \sqrt{3 - 2xz}$
$z = \sqrt{4 - 2xy}$.
Care este valoarea sumei $x + y + z$?

Demonstrație.
Ridicăm cele trei relații la pătrat și obținem
$x^2 = 2 - 2yz$
$y^2 = 3 - 2xz$
$z^2 = 4 - 2xy$.
Prin adunarea celor trei relații obținem $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx = 9 \iff (x+y+z)^2 = 9$, iar pentru ca $x, y, z > 0$ suma lor este egală cu $\boxed{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{3}$ 5p

□

Problema 2

Care este pătratul valorii ariei triunghiului $\triangle ABC$, știind că laturile sale notate a, b, c verifică relațiile:

$$a(a-2) = b + c$$

$$b(b-2) = a + c$$

$$c(c-2) = a + b?$$

Demonstrație.
Demonstrez că triunghiul este echilateral. Pentru că suma a două laturi ale unei triunghi este mai mare ca 0, deducem că a, b, $c > 2$. Scăzând primele 2 relații avem;

$$a^2 - 2a - b - c - b^2 + 2b + a + c = 0 \iff (a-b)(a+b) - a + b = 0 \iff (a-b)(a+b-1) = 0$$

Cum $a + b > 2 + 2 = 4 > 1$, deducem că $a = b$. Analog $a = c$, deci triunghiul este echilateral cu $a^2 - 2a = 2a$, deci $a \in \{0, 4\}$, de unde $a = b = c = 4$. Aria triunghiului echilateral de latură 4 va fi:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{4^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 4\sqrt{3} \implies A^2_{\triangle ABC} = \boxed{48}$$

Răspuns corect: $\boxed{48}$ 5p

□

Problema 3

Dacă $4^x - 2^{x+3} + 9^y - 2 \cdot 3^{y+2} + 97 = 0$, cu $x, y \in \mathbb{N}$, calculați suma $x + y$.

Demonstrație.
Formăm pătrate pornind de la observația $97 = 81 + 16$:

$$(4^x - 8 \cdot 2^x + 16) + (9^y - 18 \cdot 3^y + 81) = 0 \iff (2^x - 4)^2 + (3^y - 9)^2 = 0$$

Prin urmare, $2^x = 4$, iar $3^y = 9$, deci $x = y = 2$, iar $x + y = \boxed{4}$

Răspuns corect: $\boxed{4}$ .... $5p$

□

Problema 4

Numerele reale nenule x și y satisfac relațiile $x + y = 6$ și $x \cdot y = 4$. Care este valoarea expresiei

$$x + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + y?$$

Demonstrație.

$$x + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + y = x + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + y + 2 - 2 = x + y + \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{xy} - 2 =$$

$$= x + y + \frac{(x+y)^2}{xy} - 2 = 6 + \frac{36}{4} - 2 = \boxed{13}$$

Răspuns corect: $\boxed{13}$ .... $5p$

□

Problema 5

Numărul irațional x verifică relația $x^2 + \frac{3}{x} = 10$. Care este valoarea expresiei

$$x(x+1)(x+2)(x+3) + 2021?$$

Demonstrație.

$x^2 + \frac{3}{x} = 10 \iff x^3 - 10x + 3 = 0 \iff x^3 - 9x - x + 3 = 0 \iff x(x^2 - 9) - (x - 3) = 0 \iff x(x-3)(x+3) - (x-3) = 0 \iff (x-3)(x^2 + 3x - 1) = 0 \iff x = 3$ sau $x^2 + 3x - 1 = 0$.
Cum $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ excludem cazul $x = 3$ și obținem $x^2 + 3x - 1 = 0 \implies x^2 + 3x = 1$.
În final obținem:

$$x(x+1)(x+2)(x+3) + 2021 = \underbrace{x(x+3)}_{x^2+3x=1}\underbrace{(x+1)(x+2)}_{x^2+3x+2=1+2} + 2021 = 1 \cdot 3 + 2021 = \boxed{2024}.$$

Răspuns corect: $\boxed{2024}$ .... $5p$

□

Problema 6

Se aleg la întâmplare trei numere diferite din șirul 1, 2, 3, ..., 2020. Dacă probabilitatea ca produsul lor să fie un număr impar este $P = \frac{m}{n}$, unde $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $(m, n) = 1$, atunci valoarea sumei $m + n$ este egală cu:

Demonstrație.

Un triplet ordonat de numere distincte din cele 2020 de numere poate fi ales în $2020 \cdot 2019 \cdot 2018$ moduri. Rezultă că numărul de cazuri posibile este $2020 \cdot 2019 \cdot 2018$. Pe de altă parte, un triplet ordonat de numere impare distincte din cele 2020 de numere poate fi ales în $1010 \cdot 1009 \cdot 1008$ moduri. Obținem astfel că numărul de cazuri favorabile este $1010 \cdot 1009 \cdot 1008$. Prin urmare, probabilitatea ca produsul numerelor alese să fie impar este:

$$P = \frac{1010 \cdot 1009 \cdot 1008}{2020 \cdot 2019 \cdot 2018} = \frac{84}{673} \implies m = 84, n = 673.$$

Suma cerută este $m + n = 84 + 673 = \boxed{757}$.
Răspuns corect: $\boxed{757}$ .... $5p$

□

Problema 7

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{2y-5} + \sqrt{29-x-2y} = 9$$

După ce a rezolvat această ecuație cu două necunoscute, Gabriela a observat că suma soluțiilor $x + y$ este chiar vârsta ei. Aflați vârsta Gabrielei.

Demonstrație.
Folosim notațiile auxiliare: $a = \sqrt{x+3}$, $b = \sqrt{2y-5}$, $c = \sqrt{29-x-2y}$. Avem $a^2 = x+3$, $b^2 = 2y-5$, $c^2 = 29-x-2y$

$$a + b + c = 9$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = x + 3 + 2y - 5 + 29 - x - 2y = 2$$

Avem deci

$$(a+b+c)^2 = 3(a^2+b^2+c^2) \iff a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca = 3(a^2+b^2+c^2) \iff$$

$$\iff a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 = 0 \iff$$

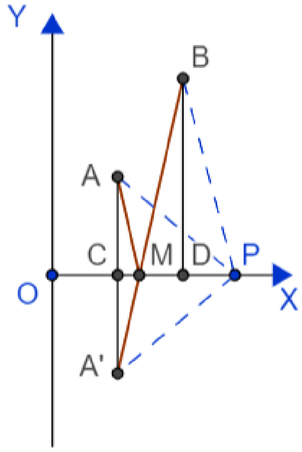
$$\iff (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \iff a = b = c = 3$$

Prin urmare, $x = 3^2 - 3 = 6$, iar $2y - 5 = 3^2$, deci $y = 7$. Avem $x + y = 6 + 7 = \boxed{13}$
Răspuns corect: $\boxed{13}$ .... $5p$

□

Problema 8
În sistemul de coordonate XOY, două orașe sunt reprezentate grafic prin punctele $A(2,3)$ și $B(4,6)$. Coordonata x a punctului $M(x,0)$ de pe axa OX, astfel încât distanța $AM + MB$ să fie minimă, este egală cu $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}^*$, $(a,b) = 1$. Care este valoarea sumei $a + b$?

Demonstrație.



Fie $A'(2,-3)$ simetricul punctului A față de axa OX. Notăm cu $\{M\} = A'B \cap OX$. Atunci OX este mediatoarea segmentului $(AA') \implies AM = A'M \implies AM + MB = A'M + MB = A'B$. Dacă P este un alt punct al axei OX atunci:

$$AP + PB = A'P + PB > A'B = AM + MB$$

Obținem astfel că punctul M este punctul în care se realizează minimul sumei $AM + MB$. Notăm cu $\{C\} = AA' \cap OX$, și cu D proiecția punctului B pe axa OX. Cum $AA' \parallel BD$, aplicăm T.F.A și obținem $\triangle A'CM \sim \triangle BDM \implies \frac{A'C}{BD} = \frac{CM}{MD} \implies \frac{3}{6} = \frac{CM}{2-CM} \implies CM = \frac{2}{3}$ și $OM = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$. Așadar $a = 8$, $b = 3 \implies a + b = \boxed{11}$

Răspuns corect: $\boxed{11}$ .... $5p$

$\square$

Problema 9

Numărul nenul $x \in \mathbb{R}$ are proprietatea că $x + \frac{1}{x}$ și $9x - x^2 \in \mathbb{Z}$. Care este suma valorilor lui x?

Demonstrație.
$x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \iff \frac{x^2+1}{x} \in \mathbb{Z} \iff \frac{x^2+1}{x} = k$, $k \in \mathbb{Z} \iff x^2 = kx - 1$. Pe de altă parte $9x - x^2 \in \mathbb{Z} \iff 9x - kx + 1 \in \mathbb{Z} \iff x(9-k) + 1 = t$, $t \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{t-1}{9-k} \in \mathbb{Q}$, atâta timp cât $k \neq 9$. Scriem $x = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a,b) = 1$. Avem $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \iff \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \in \mathbb{Z} \iff \frac{a^2+b^2}{ab} \in \mathbb{Z} \implies ab \mid (a^2+b^2)$, dar $a \mid ab \implies a \mid (a^2+b^2)$. Dar $a \mid a^2 \implies a \mid b^2$. Cum $(a,b) = 1 \implies a = \pm 1$. Analog obținem $b = \pm 1$. Prin urmare $x = \pm 1$.
Pentru $k = 9$ obținem ecuația $x^2 - 9x + 1 = 0$ cu soluțiile $x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{77}}{2}$. Prin urmare suma tuturor valorilor posibile ale lui x este $1 - 1 + \frac{9+\sqrt{77}}{2} + \frac{9-\sqrt{77}}{2} = \boxed{9}$.

Răspuns corect: $\boxed{9}$ .... $5p$

$\square$

Problema 10

Se dau numerele reale x, y, z, care verifică relațiile de mai jos:

- $z^2 - 4z = -9 - 2xy$
- $x(x-6-y) + y(y-6-x) = -13$

Care este valoarea produsului $x \cdot y \cdot z$?

Demonstrație.

$$x(x-6-y) + y(y-6-x) = -13 \iff x^2 + y^2 - 2xy - 6x - 6y + 13 = 0.$$
$$z^2 - 4z = -9 - 2xy \iff z^2 - 4z + 2xy + 9 = 0.$$

Adunăm cele 2 relații de mai sus și obținem:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 4z + 4 = 0 \iff$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^3 + (z-2)^2 = 0 \iff x = 3, y = 3, z = 2$$

Prin urmare, $x \cdot y \cdot z = 3 \cdot 3 \cdot 2 = \boxed{18}$.

Dar cele 3 valori găsite nu verifică fiecare ecuație în parte, asta înseamnă că sistemul de ecuații nu are soluții reale. În aceste condiții problema a fost anulată și a fost acordat punctaj maxim ($5p$) tuturor partipanților. □

Problema 11

Se dau a și b două numere reale pozitive și diferite, astfel încât $a + b = 2$.

Partea întreagă a numărului $\left(a - \frac{4}{a}\right)\left(b - \frac{4}{b}\right)$ este egală cu:

Demonstrație.

Înmulțind cele două paranteze obținem $ab + \frac{16}{ab} - 4\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right) = ab + \frac{16}{ab} - 4 \cdot \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} = ab +$ 8. A calcula partea întreagă revine la a calcula partea întreagă a numarului ab. Din $m_g \leq m_a \implies$ $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = 1$. Pe de altă parte, $ab > 0 \implies [ab] = 0 \implies \left[\left(a - \frac{4}{a}\right)\left(b - \frac{4}{b}\right)\right] = \boxed{8}$.

Răspuns corect: $\boxed{8}$ .... $5p$

□

Problema 12

Dacă x și y sunt numere reale astfel încât

$$(x+y)(x+1)(y+1) = 3$$

și

$$x^3 + y^3 = \frac{45}{8},$$

calculați valoarea expresiei $4(x^2 + y^2)$.

Demonstrație.
Relațiile de mai sus se mai scriu $(x+y)(xy+x+y+1) = 3$, respectiv $(x+y)^3 - 3xy(x+y) = \frac{45}{8}$.
Notăm cu $s = x+y$ și $p = xy$, iar cele două relații se rescriu $sp + s^2 + s = 3$ și $s^3 - 3sp = \frac{45}{8}$.
Înmulțind prima relație cu 3 și adunând-o cu a doua obținem $s^3+3s^2+3s = \frac{117}{8} \iff (s+1)^3 = \frac{125}{8} \iff s = \frac{3}{2}$. Înlocuind în $sp + s^2 + s = 3$ obținem $p = -\frac{1}{2}$. Prin urmare $x + y = \frac{3}{2}$ și $xy = -\frac{1}{2}$, de unde $\{x, y\} = \left\{\frac{3+\sqrt{17}}{4}, \frac{3-\sqrt{17}}{4}\right\}$. Valoarea espresiei $4(x^2 + y^2) = \boxed{13}$.

Răspuns corect: $\boxed{13}$ 5p

□

Problema 13

Care este suma tuturor soluțiilor ecuației $\{2 \cdot \{3 \cdot \{4 \cdot \{x\}\}\}\} = x$, unde am notat prin $\{x\}$ partea fractionară a numărului real x?

Demonstrație.
Dacă $a \in \mathbb{Z}$ și $b \in \mathbb{R}$ atunci are loc $\{a \cdot \{b\}\} = \{a(b - [b])\} = \{ab\}$. Ecuația este echivalentă cu $\{24x\} = x \iff 24x - [24x] = x \iff 23x = [24x] = k,\ k \in \mathbb{Z} \implies x = \frac{k}{23}$. Dar, $0 \le x < 1 \implies 0 \le \frac{k}{23} < 1 \implies k \in \left\{0, \frac{1}{23}, \frac{2}{23}, \cdots, \frac{22}{23}\right\}$ iar suma acestora este egală cu $\boxed{11}$.

Răspuns corect: $\boxed{11}$ 5p

□

Problema 14

Un copil merge la un parc de distracții. Acolo are patru variante de atracții: pendulum ride, roller coaster, un carusel și plimbare pe apă. Copilul cumpără 25 de fise. Fiecare atracție costă 3 fise pe rundă, exceptând roller coaster-ul, care costă 5 fise pe rundă. Copilul vrea să încerce fiecare atracție cel puțin o dată, iar ordinea rundelor nu contează. În câte moduri poate copilul să consume fisele?

Atenție: Este posibil ca la finalul zilei el să mai rămână cu niște fise.

Demonstrație.
Folosim următoarele notații:

- $a =$ Numărul de runde de pendulum ride
- $b =$ Numărul de runde de carusel
- $c =$ Numărul de runde de plimbare pe apă
- $d =$ Numarul de runde de roller coaster

Din ipoteză avem următoarele relații: $3a + 3b + 3c + 5d \le 25$, $a \ge 1$, $b \ge 1$, $c \ge 1$ și $d \ge 1$. Notăm $a' = a - 1$, $b' = b - 1$, $c' = c - 1$ și $d' = d - 1$ cu $a', b', c', d' \in \mathbb{N}$. Atunci $3(a' + b' + c') + 5d' = 3(a + b + c) - 3 \cdot 3 + 5d - 5 \implies 3(a' + b' + c') + 5d' \le 11$.
Analizăm în continuare valorile pe care le pot avea a', b', c'.

- **Cazul 1:** $a' + b' + c' = 0$.
  Obținem $a' = b' = c' = 0$. Avem o singură variantă în acest caz.
- **Cazul 2:** $a' + b' + c' = 1$.
  Obținem $(a', b', c') \in \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$. Avem 3 variante in acest caz.
- **Cazul 3:** $a' + b' + c' = 2$.
  Obținem $(a', b', c') \in \{(2,0,0), (0,2,0), (0,0,2), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$. Avem 6 variante în acest caz.
- **Cazul 4:** $a' + b' + c' = 3$.
  Obținem $(a', b', c') \in \{(3,0,0), (0,3,0), (0,0,3), (2,1,0), (1,2,0), (2,0,1), (1,0,2), (0,2,1), (0,1,2), (1,1,1)\}$. Avem 10 variante în acest caz.

Analizăm în continuare valorile pe care le poate avea d'.

- **Cazul 1:** $d' = 0$.
  Avem $3(a' + b' + c') \leq 11 < 12 \implies a' + b' + c' < 4 \implies a' + b' + c' \in \{0, 1, 2, 3\}$. Reținem $1 + 3 + 6 + 10 = 20$ variante în acest caz.
- **Cazul 2:** $d' = 1$.
  Avem $3(a' + b' + c') + 5 \leq 11 \implies a' + b' + c' \leq 2 \implies a' + b' + c' \in \{0, 1, 2\}$. Reținem $1 + 3 + 6 = 10$ variante în acest caz.
- **Cazul 3:** $d' = 2$.
  Avem $3(a' + b' + c') + 10 \leq 11 \implies 3(a' + b' + c') \leq 1 \implies a' + b' + c' = 0$. Reținem 1 variantă în acest caz.

În total avem $20 + 10 + 1 = \boxed{31}$ variante în care copilul își poate consuma fisele.

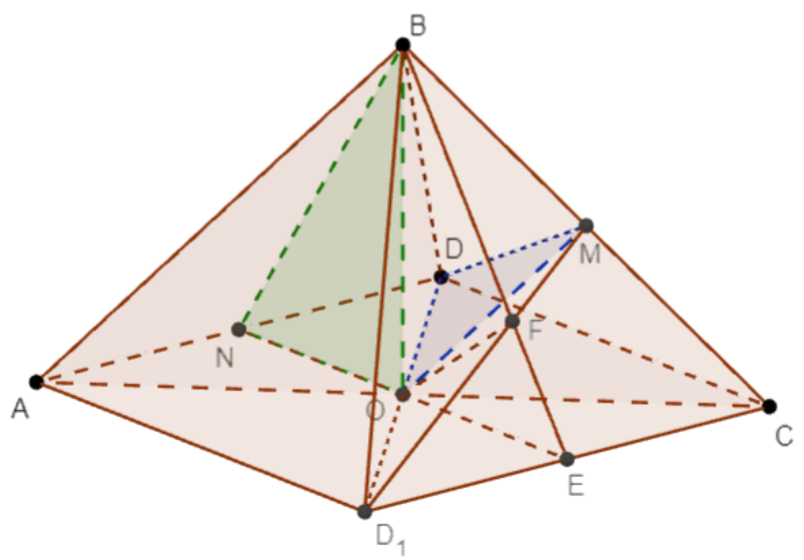
Răspuns corect: $\boxed{31}$ .... $5p$

$\square$

Problema 15

Pătratul $ABCD$ se îndoaie după dreapta AC până când $(ACB) \perp (ACD)$. Notăm cu M mijlocul laturii (BC), cu N mijlocul laturii (AD) și cu O mijlocul laturii (AC). Aflați măsura unghiului determinat de planele (OBN) și (ODM).

Demonstrație.



Notând cu D_1 simetricul lui D față de O obținem piramida patrulateră regulată cu vârful în B și baza pătratul $ADCD_1$ în care fețele laterale sunt triunghiuri echilaterale. Dacă $\{E\} = NO \cap CD_1$, atunci $(BON) = (BNE)$. De asemenea $(DMO) = (DMD_1)$ cum BE și D_1M sunt mediane în triunghiul echilateral BCD_1 deducem că $\{F\} = BE \cap D_1M$ este punct comun al planelor (NOB) si (DOM). Rezultă că $(NOB) \cap (MOD) = OF$. Mai mult, punctul F este centrul de greutate al triunghiului BCD_1. Acum, piramida cu baza BCD_1 și vârful în punctul O este o piramidă regulată ($\triangle BCD_1$ este echilateral, iar $OB = OC = OD_1 = \dfrac{AC}{2}$) și atunci $OF \perp (BCD_1$. Cum $D_1M, BE \subset (BCD_1)$ rezultă $D_1F \perp OF$ și $BF \perp OF$, adică unghiul căutat este unghiul dintre dreptele D_1M și BE. Cum măsura unghiului dintre două mediane ale unui triunghi echilateral este de $60°$, deducem că măsura unghiului dintre cele două plane este de $\boxed{60°}$.

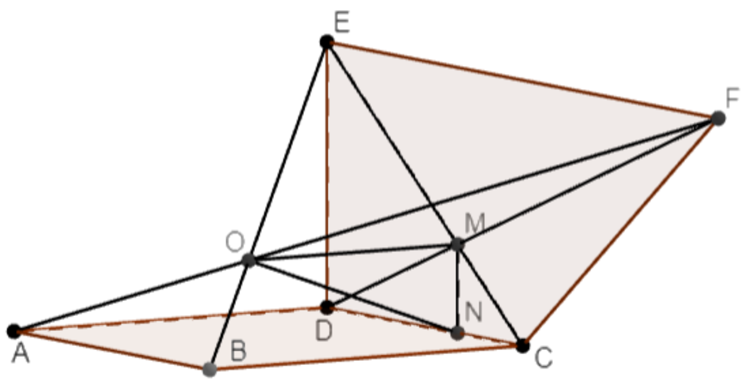
Răspuns corect: $\boxed{60}$ .... $5p$

□

Problema 16

Pătratul $ABCD$ și trapezul $CDEF$, cu bazele CD și EF, sunt situate în plane perpendiculare, iar $AD = 9\ cm$ și $EF = 18\ cm$. Notăm cu $\{O\} = AF \cap BE$ și $d(O,(ABC)) + d(O,(CDE)) = 10\ cm$. Care este valoarea pătratului distanței de la punctul O la dreapta CD?

Demonstrație.



Notăm M intersecția dreptelor DF și CE. $BC \perp (DCE), AD \perp (DCE) \implies (BCE) \perp (DCE)$ și $(ADF) \perp (DCE) \implies OM \perp (DCE)$ ca intersecția a două plane perpendiculare pe același plan, de unde obținem că $d(O,(DCE)) = OM$. Pe de altă parte $OM \parallel (ABC) \implies d(O,(ABC)) = d(M,(ABC))$. Notăm N piciorul perpendicularei din M pe DC și din teorema celor 3 perpendiculare rezultă că $d(O,CD) = ON$. Din $\triangle EMO \sim \triangle ECB$ și $\triangle MDC \sim \triangle MFE \implies \dfrac{OM}{BC} = \dfrac{EM}{EC} = \dfrac{EF}{EF+DC} = \dfrac{2}{3} \implies OM = 6 \implies MN = 4 \implies ON^2 = \boxed{52}$.

Răspuns corect: $\boxed{52}$ .... $5p$

□

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$