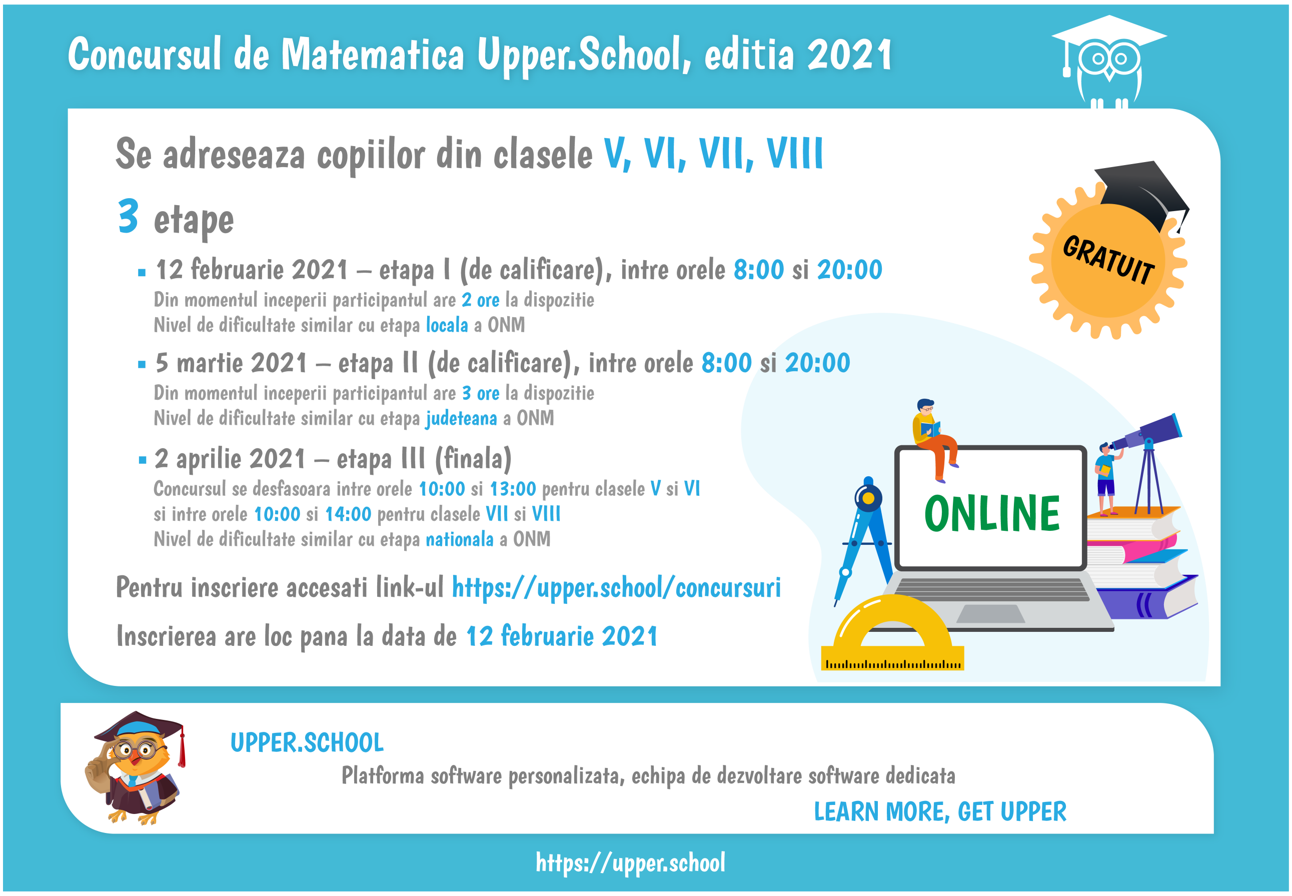

Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2021

Etapa III
Clasa a V-a

- Soluții -

Selecție probleme
Prof. Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Considerăm numerele $\overline{abcd}$, $\overline{ab} < \overline{cd}$ și $\overline{ab} \cdot (\overline{ab} + 1) \cdot (\overline{ab} + 2) \cdot \ldots \cdot \overline{cd}$ este divizibil cu 10^{15}, dar nu este divizibil cu 10^{16}.
a) Câte astfel de numere există?
b) Demonstrați că se pot alege câteva dintre ele care au suma divizibilă cu 104.

Bogdan Georgescu, profesor, București

Demonstrație:
a) Numărul de zerouri este dat de exponentul puterii lui 5 din descompunerea în factori primi a produsului. Avem 10, 15, 20, 30, 35, 40, 45, 55, 60, 65, 70, 80, 85, 90, 95 care au câte un factor de 5, iar 25, 50 și 75 care au 2 factori de 5. Următoarele produse vor avea exact 15 factori de 5:

- $10 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 70$ (sau 71, 72, 73, 74) $\implies \overline{abcd} \in \{1070, 1071, \ldots, 1074\}$. În total 5 numere.
- $\overline{ab} \cdot (\overline{ab}+1) \cdot \ldots \cdot \overline{cd}$, unde $\overline{ab} \in \{16, 17, 18, 19, 20\}$ și $\overline{cd} \in \{75, 76, 77, 78, 79\} \implies 5 \cdot 5 = 25$ de numere;
- $\overline{ab} \in \{21, 22, 23, 24, 25\}$ și $\overline{cd} \in \{80, 81, 82, 83, 84\} \implies 5 \cdot 5 = 25$ de numere;
- $\overline{ab} \in \{26, 27, 28, 29, 30\}$ și $\overline{cd} \in \{90, 91, 92, 93, 94\} \implies 5 \cdot 5 = 25$ de numere;
- $\overline{ab} \in \{31, 32, 33, 34, 35\}$ și $\overline{cd} \in \{95, 96, 97, 98, 99\} \implies 5 \cdot 5 = 25$ de numere;

În total, $5 + 25 + 25 + 25 + 25 = 105$ numere.
b) Notăm numerele cu $x_1, x_2, \ldots, x_{105}$. Fie:

$$S_1 = x_1$$

$$S_2 = x_1 + x_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_{104} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{104}$$

Dacă una dintre aceste sume este divizibilă cu 104, problema este gata. Dacă nu, avem 104 numere şi 103 resturi distincte nenule la împărțirea cu 104, deci, conform principiului cutiei, există S_i şi S_j, $i > j$, astfel încât $104 \mid S_i - S_j \implies 104 \mid x_{j+1} + x_{j+2} + \ldots + x_i$.
Prin urmare, submulțimea $\{x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_i\}$ a lui A are suma elementelor divizibilă cu 104.

Barem:

- Observarea faptul că numărul de zerouri este egal cu exponentul lui 5 . . . . $1p$
- Observația că numerele 25, 50, 75 au fiecare 2 factori de 5 . . . . $1p$
- Aflarea numărului total de numere folosind numerele divizibile cu 5 de 2 cifre . . . . $2p$
- Punctul b), pentru justificarea existenței sau găsirea unui exemplu. . . . . $3p$

□

Problema 2

Se consideră șirul de numere naturale $2, 6, 30, \ldots$, în care termenul de pe locul k este produsul primelor k numere naturale prime. Se știe că diferența dintre doi termeni ai șirului este 30000. Să se găsească aceste numere.

Demonstrație:
Notăm cu $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ termenii șirului.

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 \cdot 3$$

$$a_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_n$$

unde p_n este este al n-lea număr prim scris în ordine crescătoare.
Fie a_k și a_t cu $k > t$ cei doi termeni ai șirului pentru care

$$a_k - a_t = 30000 \iff 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_k - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_t = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^4$$

Avem deci $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_k > 30000$, de unde obținem că p_k este suficient de mare (pentru $p_k = 11$ obținem doar 2310) așadar, a_k se divide și cu 2, și cu 3, și cu 5.
Din relația $a_k - a_t = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^4$, rezultă că $2 \mid a_t$, $3 \mid a_t$, $5 \mid a_t$. Cum a_t este produs de factori primi, rezultă că $p_t \geq 5$, iar

$$a_k - a_t = 30000 \iff 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p_t \cdot (p_{t+1} \cdot p_{t+2} \cdot \ldots \cdot p_k - 1) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^4$$

Pe de altă parte, factorii primi din descompunerea lui 30000 sunt egali cu cel mult 5, deci $p_t = 5$. Așadar,

$$2 \cdot 3 \cdot 5\,(7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot p_k - 1) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^4$$

Avem deci $7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot p_k = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, deci $p_k = 13$. Avem $a_6 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030$, iar $a_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Barem:

- Scrierea expresiei $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_k - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_t = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^4$ .... $2p$
- Scrierea expresiei $2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p_t \cdot (p_{t+1} \cdot p_{t+2} \cdot \ldots \cdot p_k - 1) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^4$ .... $1p$
- Demonstrarea faptului că $p_t = 5$ .... $2p$
- Aflarea lui p_k din expresia $7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot p_k = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ .... $1p$
- Finalizare, menționarea numerelor 30030 și 30 .... $1p$

$\square$

Soluție alternativă:
Fie $p_1, p_2, ..., p_n$ primele n numere naturale prime, $p_1 < p_2 < .... < p_n$. Pentru simplitatea exprimării vom nota termenul de pe locul n cu $a_n = p_1 \cdot p_2 \cdot .... \cdot p_n$. Pentru început demonstrăm că diferența dintre doi termeni consecutivi ai șirului crește pe măsură ce crește locul termenului în șir.
Fie a_i, a_{i+1}, a_{i+2} trei termeni consecutivi.

Atunci, $a_{i+2} - a_{i+1} = p_1 \cdot p_2 \cdot .... \cdot p_{i+1} \cdot (p_{i+2} - 1) > p_1 \cdot p_2 \cdot .... \cdot p_i \cdot (p_{i+1} - 1) = a_{i+1} - a_i$, ceea ce finalizează demonstrația.
Încercând să vedem cât de repede cresc diferențele găsim că diferența dintre a_7 și a_6 este mai mare decât 30000 și atunci pentru termenii de pe poziții mai mari decât 6 diferențele dintre termenii consecutivi sunt prea mari, cu atât mai mult diferențele dintre termeni neconsecutivi. Dacă $i \geq 7$ și $j < i$ atunci $a_i - a_j > a_7 - a_6 > 30000$. Rămâne să căutăm printre primii 6 termeni ai șirului și găsim soluția unică a_3, a_6. □

Problema 3

În fiecare pătrățel al unui dreptunghi 10×19 s-a scris unul dintre numerele 0 sau 1, după care se calculează toate sumele pe fiecare linie și pe fiecare coloană. Care este cel mai mic și cel mai mare număr de rezultate diferite care se poate obține?

Demonstrație:
Evident, numărul minim de rezultate diferite este 1, un exemplu fiind toată tabla acoperită cu 0. Pe de altă parte, sumele care se pot obține sunt de la 0 la 19, în total 20 de valori posibile. Dacă ar fi posibil să le obținem pe toate atunci o linie sau o coloană ar conține doar cifra 0. Dacă există o coloană care e ocupată doar de cifra 0 atunci toate sumle de pe lini și coloane sunt cel mult egale cu 18, adică nu îl putem obține pe 19. Dacă există o linie nulă atunci suma numerelor din fiecare coloană este cel mult egală cu 9, deci pe linii ar trebui să se obțină sumlele de la 10 la 19, imposibil pentru că una dintre linii este nulă. Un exemplu cu 19 sume diferite este dat în figura următoare.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**9**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**10**
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**11**
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**12**
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**13**
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**14**
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**15**
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**16**
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**17**
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**18**
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	

Barem:

- Numărul minim de sume este 1, un exemplu fiind toată tabla acoperită cu 0 . . . . $1p$
- Demonstrarea faptul că 20 sume nu se pot obține și menționarea faptul că numărul maxim este 19 . . . . $3p$
- Un exemplu pentru numărul maxim de sume . . . . $3p$

□

Problema 4

Completăm pătrățelele unui pătrat $n \times n$ cu numere de la 1 la n astfel:

- fiecare linie conține toate numerele de la 1 la n;
- fiecare coloană conține toate numerele de la 1 la n.

Fiecare pătrățel în care este scris un număr mai mare decât numărul coloanei în care se află se colorează în verde. Un exemplu de completare și colorare pentru $n = 3$ este arătat în figura de mai jos:

	C_1	C_2	C_3
L_1	3	1	2
L_2	1	2	3
L_3	2	3	1

a) Este posibil ca pentru n număr natural par să găsim o completare a pătratului după regulile de mai sus astfel încât pe fiecare linie numărul de pătrățele verzi să fie același?
b) Dar pentru n număr natural impar?

Demonstrație:
a) Vom demonstra că pentru n par nu este posibilă o astfel de completare. Presupunem că ar fi posibilă. Atunci, pe coloana 1 se află toate numerele de la 1 la n, așadar $n-1$ pătrățele vor fi verzi, oricum am distribui numerele pentru că toate numerele de la 2 la n sunt mai mari decât numărul coloanei pe care se află. Din același motiv în coloana 2 vom avea $n-2$ pătrățele verzi, în coloana 3 vor fi $n-3$ pătrățele verzi și așa mai departe, în coloana $n-1$ un singur pătrățel este verde, iar în coloana n niciunul nu este colorat în verde. Numărul total de pătrățele verzi din pătrat este $1+2+3+\ldots+(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Pe de altă parte, dacă pe fiecare linie avem același număr de pătrățele verzi, fie acesta k, atunci numărul de pătrățele verzi este egal cu nk. De aici avem că $\dfrac{n(n-1)}{2} = nk \iff \dfrac{n-1}{2} = k$, imposibil pentru că $n-1$ este număr impar și $\dfrac{n-1}{2} \notin \mathbb{N}$. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă.
b) Pentru $n = 2k+1$ considerăm următorul exemplu de completare al pătratului $n \times n$:

	C_1	C_2	C_3		...	C_{n-1}	C_n
L_1	n	n-1	n-2	n-3	...	2	1
L_2	1	n	n-1	n-2	...	3	2
L_3	2	1	n	n-1	...	4	3
L_4	3	2	1	n	...	5	4
	...	...	...	...	...	...	...
L_{n-1}	n-2	n-3	n-4	n-5	...	n	n-1
L_n	n-1	n-2	n-3	n-4	...	1	n

Fixăm linia i și calculăm numărul de pătrățele verzi de pe această linie.

- **Cazul** $j < i$. Valoarea pătrățelului de pe coloana j este $i - j$. Pătrățelul este verde dacă și numai dacă $i - j > j \iff j < \frac{i}{2}$.
- **Cazul** $j \geq i$. Valoarea pătrățelului de pe coloana j este $n + i - j$. Pătrățelul este verde dacă și numai dacă $n + i - j > j \iff i \leq j < \frac{n+i}{2} = \frac{2k+1+i}{2}$.

În cazul în care i este par, $i = 2s$, obținem $s - 1$ pătrățele verzi din primul caz și $k + s - (2s - 1)$ din cel de al doilea caz. În total sunt $s - 1 + k + s - (2s - 1) = k$ pătrățele verzi.
Dacă i este impar, $i = 2s + 1$, obținem s pătrățele verzi din primul caz și $k + s - 2s$ din cel de al doilea caz. În total sunt $s + k + s - 2s = k$ pătrățele verzi.
Așadar fiecare linie a pătratului are k pătrățele verzi.

Barem:

- Demonstrația faptului că n par este imposibil . . . . $3p$
- Exemplu pentru $n = 2k + 1$ . . . . $2p$
- Justificarea faptului că exemplul este corect . . . . $2p$

□

Problemele 1-4: . . . . $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: . . . . $0p$
Total: . . . . $28p$