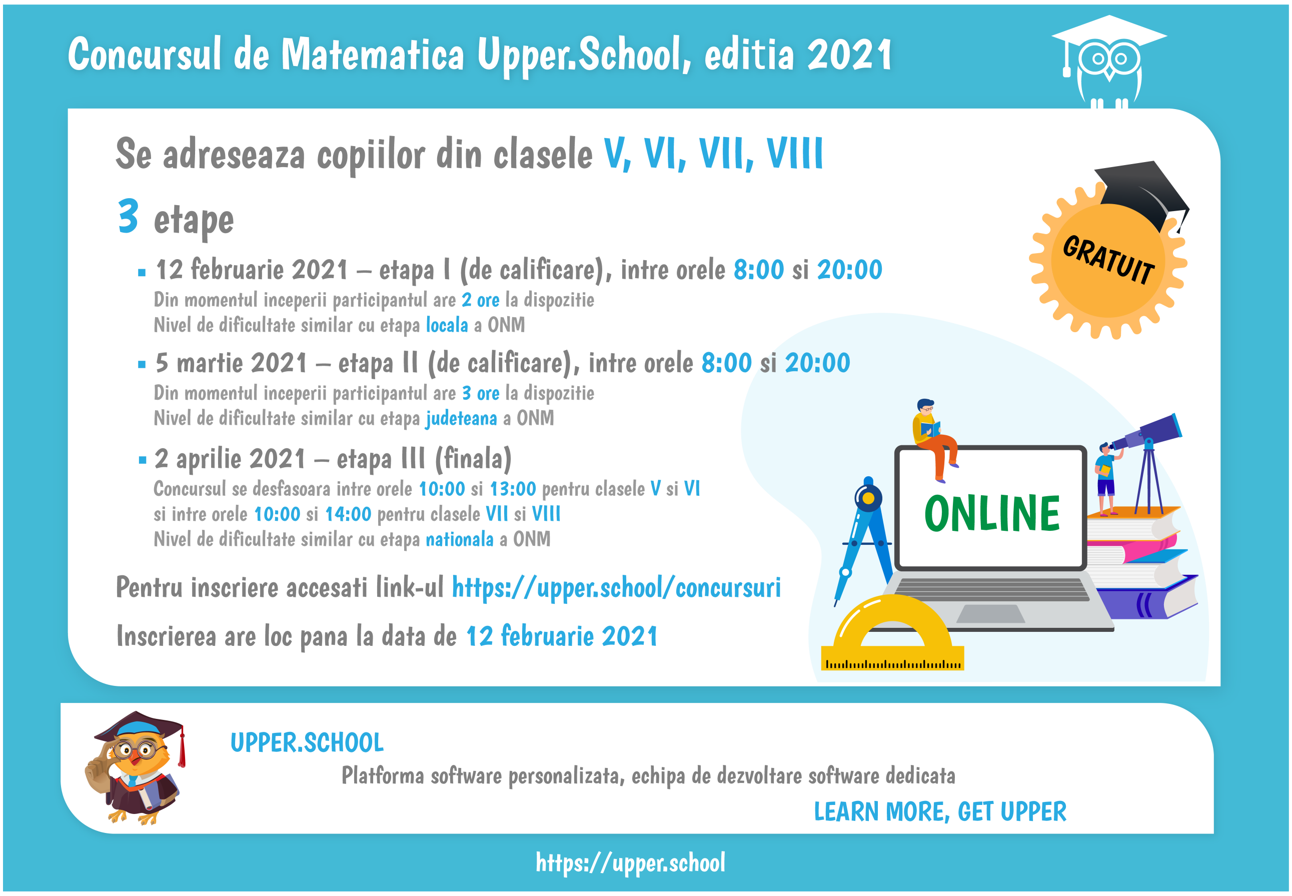


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2021

Etapa III
Clasa a VI-a

- Soluții -

Selecție probleme
Prof. Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Pentru un număr întreg pozitiv n scriem în ordine crescătoare toți divizorii

$$1 = d_1 < d_2 < d_3 < ... < d_k = n.$$

Care sunt valorile lui n pentru care $2021 \mid n$ și $n = d_{19} \cdot d_{20}$?

Demonstrație:
Avem $43 \cdot 47 = 2021 \mid n$,, dar 43 și 47 sunt prime, adică $43 \mid n$ și $47 \mid n$.
Știm că $d_1 \cdot d_k = d_2 \cdot d_{k-1} = \ldots = d_{19} \cdot d_{20}$. Numărul de diviziori este $k = 19 + 20 - 1 = 38$. Pe de altă parte $n = 43^{a_1} \cdot 47^{a_2} \cdot t$, unde $(t, 43) = 1$ și $(t, 47) = 1$ și $t = p_3^{a_3} \cdot p_4^{a_4} \cdot_{\ldots}$. Numărul de divizori ai lui n este egal cu $38 = 1 \cdot 38 = 2 \cdot 19 = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdot_{\ldots}$, iar cum n are cel puțin 2 factori primi în descompunere, obținem că are exact 2 factori primi în descompunere iar $38 = 2 \cdot 19$.

$$\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) = 2 \cdot 19$$

Avem deci $a_1 = 1$ și $a_2 = 18$ sau $a_1 = 18$ și $a_2 = 1$. În primul caz $n = 43 \cdot 47^{18}$, iar în al doilea $n = 43^{18} \cdot 47$.

Barem:

- Afirmația: $d_1 \cdot d_k = d_2 \cdot d_{k-1} = \cdots = d_{19} \cdot d_{20}$ . . . . $1p$
- Aflarea numărului de divizori $k = 38$ . . . . $2p$
- Scrierea formulei pentru numărul de divizori . . . . $1p$
- n are exact 2 factori primi cu exponenții 1, respectiv 18 . . . . $2p$
- Scrierea celor 2 soluții pentru n . . . . $1p$

□

Problema 2

Spunem despre un număr natural nenul că se numește *amestecat* dacă îndeplinește simultan condițiile:
$a)$ toate cifrele lui sunt nenule;
$b)$ numărul este divizibil cu 11;
$c)$ numărul este divizibil cu 12 și oricum am schimba ordinea cifrelor sale numărul rămâne divizibil cu 12.
Câte numere de 10 cifre sunt *amestecate*?

Demonstrație:
Notăm numărul *amestecat* prin $N = \overline{a_1 a_2 \cdots a_{10}}$. Din $c)$ avem $4 \mid N$, deci numărul format din ultimele 2 cifre ale lui N este divizibil cu 4 pentru orice permutare a cifrelor, deci toate cifrele sunt pare și nenule. Mai mult, N nu poate avea mai mult de o cifră de 2, deoarece la permutarea cifrelor în care ultimele 2 cifre sunt ambele egale cu 2, obținem numărul 22 care nu este divizibil cu 4, imposibil. Din același motiv numărul nu poate conține mai mult de o cifră de 6. Restul cifrelor sunt egale cu 4 și 8. Dacă N are conține o cifră de 2, atunci există o permutare unde numărul format din ultimele două cifre ale lui N este 42 sau 82, deci N nu este divizibil cu 4,

imposibil. Prin urmare, un număr *amestecat* nu conține cifra 2. Din același motiv, un nunăr *amestecat* nu conține nici cifra 6.
Prin urmare, un număr *amestecat* este format doar din cifre de 4 și 8, cel puțin una din fiecare, pentru că numerele $\underbrace{\overline{44\cdots4}}_{10\ cifre}$ și $\underbrace{\overline{88\cdots8}}_{10\ cifre}$ nu sunt divizibile cu 3, deci nici cu 12.
Notăm cu x numărul de cifre de 4 și cu y numărul de cifre de 8. Avem $x+y=10$ și $3 \mid 4x+8y$. Cum $3 \mid x+2y$ avem $3 \mid 10+y$, adică $y \in \{2,5,8\}$, deci $(x,y) \in \Big\{\big(2,8),(5,5),(8,2)\Big\}$. Numerele *amestecate* N pot fi scrise ca suma a două numere:

$$N = \underbrace{\overline{44\cdots4}}_{10\ cifre} + \overline{x_1x_2\cdots x_{10}}$$

unde $x_1x_2\cdots x_{10} \in \{0,4\}$ și pentru că $11 \mid \underbrace{\overline{44\cdots4}}_{10\ cifre}$, avem și $11 \mid \overline{x_1x_2\cdots x_{10}}$. Notăm $X = \overline{x_1x_2\cdots x_{10}}$.

Cazul I: $x=8$ și $y=2$. Cele două cifre de 4 din scrierea lui X ocupă poziții de parități diferite, fiecare are 5 locuri la dispoziție. Astfel obținem $5\cdot5=25$ de numere.

Cazul II: $x=5$ și $y=5$. Dacă cele cinci cifre de 4 din scrierea lui X ocupă poziții de aceeași paritate, diferența dintre suma cifrelor de rang par și suma cifrelor de rang impar este 20, iar $11 \nmid 20$. Dacă exact 4 dintre ele sunt pe poziții de aceeași paritate, diferența este 12, iar $11 \nmid 12$. Dacă 3 dintre ele sunt pe poziții de aceeași paritate, iar 2 sunt pe poziții de parităţe diferită, diferența este 4, iar $11 \nmid 4$. Așadar, în acest caz nu avem soluții.

Cazul III: $x=2$ și $y=8$. Dacă cele două cifre de zero ocupă poziții de aceeași paritate atunci diferența sumelor cifrelor este 8, iar $11 \nmid 8$. Dacă cifrele de 0 sunt pe poziții de parități diferite, atunci sumele cifrelor sunt egale și toate numerele sunt divizibile cu 11. La fel ca și în Cazul I, se obțin $5\cdot5=25$ de numere *amestecate*.

Prin urmare, avem în total 50 de numere *amestecate*.

Barem:

- N are toate cifrele pare și nu conține cifre de 2 sau 6 .... $2p$
- Modulo 3 avem $(x,y) \in \Big\{\big(2,8),(5,5),(8,2)\Big\}$ .... $2p$
- Tratarea Cazului I .... $1p$
- Tratarea Cazului II .... $1p$
- Tratarea Cazului III și meționarea numărului total de numere *amestecate* .... $1p$

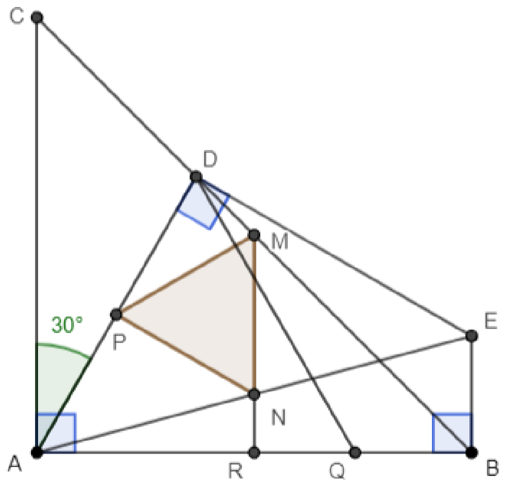
$\square$

Problema 3

Fie $\triangle ABC$ dreptunghic isoscel cu $(AB) \equiv (AC)$. Se consideră punctul D pe ipotenuză, astfel încât $m(\angle CAD) = 30°$. Se construiește $\triangle DAE$ dreptunghic isoscel cu $(DE) \equiv (DA)$, astfel încât punctele A și E sunt de o parte și de alta a dreptei BC. Notăm cu M și N mijloacele laturilor (BC) respectiv (AE).
$a)$ Arătați că $\triangle AEB$ este dreptunghic;
$b)$ Demonstrați că $MN \parallel AC$;
$c)$ Arătați că $2MN = AD$.

Bud Adrian, Negrești Oaș

Demonstrație:



$a)$ $\angle ADB$ este exterior $\triangle ACD \implies$

$$m(\angle ADB) = m(\angle DAC) + m(\angle DCA) = 30° + 45° = 75°.$$

Fie $Q \in (AB)$ astfel încât $\triangle ADQ$ este echilateral.

$$m(\angle BDQ) = m(\angle BDA) - m(\angle QDA) = 75° - 60° = 15°.$$

$$m(\angle EDB) = m(\angle EDA) - m(\angle BDA) = 90° - 75° = 15°.$$

Din $[DE] \equiv [DQ]$, $\angle EDB \equiv \angle QDB$ și $[DB]$ latură comună $(LUL) \implies \triangle DEB \equiv \triangle DQB$

$$\implies m(\angle DBE) = m(\angle DBQ) = 45°$$

$$m(\angle ABE) = m(\angle ABD) + m(\angle DBE) = 45° + 45° = 90°$$

Deci $\triangle AEB$ este dreptunghic.

$b)$ Fie R mijlocul lui (AB). În $\triangle BAC$ avem:

$$(BM) \equiv (MC)$$

$$(BR) \equiv (RA)$$

$\implies$ (MR) este linie mijlocie, deci $MR \parallel AC$.
În $\triangle AEB$ avem:

$$(AN) \equiv (NE)$$

$$(AR) \equiv (RB)$$

$\Longrightarrow$ NR este linie mijlocie, deci $MR \parallel BE$. Cum $BE \parallel AC$, obținem $NR \parallel AC$.
Din unicitatea paralelei printr-un punct la o dreaptă obținem că punctele M, N și R sunt coliniare, deci $MN \parallel AC$.

c) Notăm cu P mijlocul laturii AD. În $\triangle ABC$, avem $m(\angle AMB) = 90°$ (AM mediană din unghiul drept). În $\triangle AMD$, $m(\angle AMD) = 90°$ iar MP este mediană din unghiul drept $\Longrightarrow MP = \dfrac{AD}{2}$

$$m(\angle DAM) = m(\angle CAM) - m(\angle CAD) = 45° - 30° = 15°$$

$$\angle DPM \text{ este exterior } \triangle PAM \implies m(\angle DPM) = 2m(\angle PAM) = 30°.$$

$\triangle DAE$ este dreptunghic în D iar PN este linie mijlocie $\Longrightarrow PN = \dfrac{DE}{2} = \dfrac{AD}{2}$

$$\text{Iar } m(\angle APN) = m(\angle ADE) = 90°$$

$$m(\angle MPN) = 180° - m(\angle DPM) - m(\angle APN) = 60°$$

Astfel $\triangle PMN$ este isoscel $MP = NP$ cu $m(\angle MPN) = 60°$ deci echilateral. $MN = NP = \dfrac{AD}{2} \Longrightarrow 2MN = AD$.

Barem:

- *a*) Fie $Q \in (AB)$ astfel ca $\triangle ADQ$ este echilateral 1*p*
- $\triangle DEB \equiv \triangle DQB$, iar din calcul de unghiuri $m(\angle ABE) = 90°$ 1*p*
- *b*) Consideră R mijlocul lui AB 1*p*
- Observațiile $MR \parallel AC$ și $NR \parallel BE \parallel AC$ 1*p*
- *c*) Consideră P mijlocul lui (AD) 1*p*
- (MP) mediană în triunghi dreptunghic și $m(\angle MPN) = 60°$ 1*p*
- (NP) este linie mijlocie și $\triangle MNP$ este echilateral 1*p*

$\square$

Problema 4

Numerele naturale din mulțimea $A = \{1, 2, 3..., 2020\}$ se împart în mai multe submulțimi disjuncte oricare două (numărul submulțimilor este cel puțin egal cu 2). Se știe că fiecare submulțime are cardinalul cel mult 1010. Să se demonstreze că toate aceste numere pot fi grupate în perechi de câte două numere cu suma în fiecare pereche număr impar, iar numerele din fiecare pereche fac parte din submulțimi diferite.

Demonstrație:
Notam cu A_i $i = \overline{1, n}$ cele n submultimi si cu c_i cardinalul fiecareia dintre ele.
Daca exista A_j cu $c_j = 1010$ atunci, daca p este numarul de numere pare din multimea A_j atunci numarul de numere impare este $1010 - p$, iar in celelalte multimi vom avea in total sunt $1010 - p$ numere pare. Astfel, fiecare numar impar din multimea A_j poate fi pus in pereche cu un numar par din celelalte multimi, iar fiecare dintre cele p numere pare din multimea A_j poate

fi pus in pereche cu unul impar din celelalte submultimi.
Daca $c_i < 1010$ pentru fiecare i atunci vom alege o pereche de numere de paritati diferite din multimi diferite si o dam deoparte. Atunci, pentru cele doua multimi din care a fost aleasa perechea, diferenta dintre jumătate din numărul de numere rămase și cardinalul ei nu s-a schimbat, iar pentru celelalte multimi s-a micsorat cu o unitate. Daca pentru toate multimile diferenta a ramas pozitiva atunci repetam procedeul si continuam pana cand la una dintre multimi diferenta devine nula, caz care s-a analizat mai sus.

Barem:

- Notarea cardinalelor mulțimiilor ... $1p$
- Cazul când un cardinal este egal cu 1010 ... $2p$
- Ideea de a da la o parte perechi de numere de parități diferite până nu se mai poate ... $2p$
- Finalizarea cazului când toate cardinalele sunt mai mici ca 1010 ... $2p$

□

Problemele 1-4: ... $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: ... $0p$
Total: ... $28p$