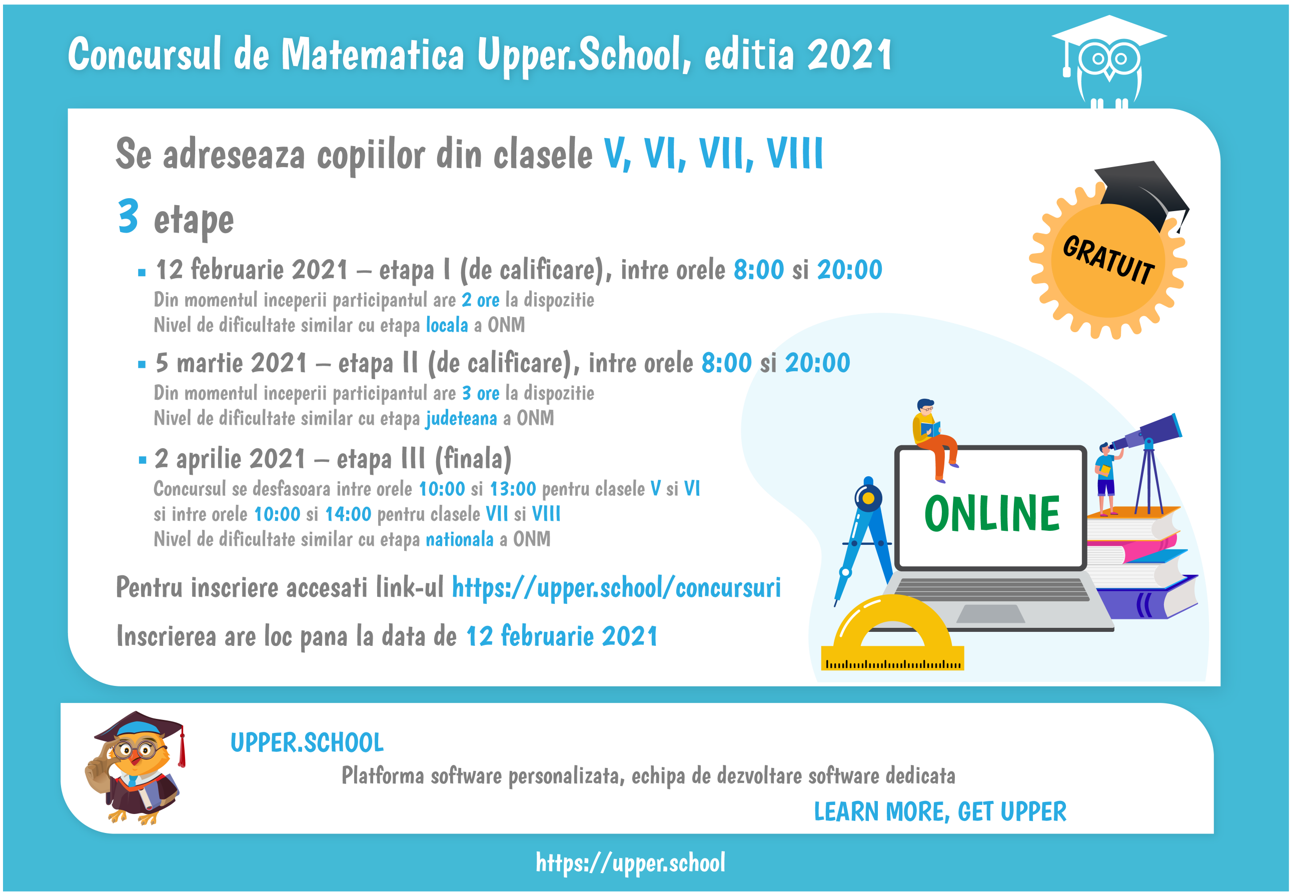


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2021

Etapa III
Clasa a VII-a

- Soluții -

Selecție probleme
Prof. Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Pentru toate perechile de numere întregi pozitive (m, n) astfel încât m și n au același număr de divizori vom defini operația $*$ astfel: dacă $1 = m_1 < m_2 < m_3 < ... < m_k = m$ sunt toți divizorii lui m, iar $1 = n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k$ sunt toți divizorii lui n atunci $m * n = m_1 \cdot n_1 + m_2 \cdot n_2 + ... + m_k \cdot n_k$. Aflați perechile de numere (m, n) pentru care $m * n = 497$.

Demonstrație:
Fără a restrânge generalitatea presupunem $n \le m$. Avem $m * n > n^2$, deci $n^2 < 497$, adică $n \le 22$. Numărul de divizori k va fi mai mic sau egal cu 6. Dacă k este prim atunci $n = p^{k-1}$, iar $m = q^{k-1}$, pentru p și q prime. Prin urmare,

$$p \cdot q \mid m * n - 1 \implies p \cdot q \mid 496 = 2^4 \cdot 31$$

Prin urmare $p = 2$, $q = 31$. Cum $31^2 > 497$, avem $n = 2$, $m = 31$, fără soluție. Rămân cazurile $k \in \{1, 4, 6\}$.

- *Cazul 1:* $k = 1$, iar $m = n = 1$ imposibil.
- *Cazul 2:* $k = 4$, atunci $m_2 \cdot m_3 = m_4 = m$, iar $n_2 \cdot n_3 = n_4 = n$, deci:

  $$m * n = (1 + n_2 m_2) \cdot (1 + n_3 m_3) =$$

  Prin urmare $n_2 \cdot m_2 = 6$, iar $n_3 \cdot m_3 = 40$, cu n_2, m_3 prime, imposibil.

- *Cazul 3:* $k = 6$, atunci $n \in \{12, 18, 20\}$.
  ∘ Pentru $n = 12$ avem:

  $$1 + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 + 6m_5 + 12m_6 = 497$$

  Obținem că $2 \mid m_3$, deci $m_2 = 2$, deci $m_3 = 4$. Avem:

  $$1 + 4 + 12 + 4 \cdot \frac{m}{4} + 6 \cdot \frac{m}{2} + 12m = 497 \implies m = 30$$

  Cum $4 \nmid 30$, avem o contradicție.
  ∘ Pentru $n = 18$, avem:

  $$1 + 2m_2 + 3m_3 + 6m_4 + 9m_5 + 18m_6 = 497$$

  cum $m \cdot n < m * n = 497$, avem $m \le 27$ și $18 \le m$, deci $m = 20$ sau $m = 18$ (m are 6 divizori). Perechea $(m, n) = (20, 18)$ verifică.
  ∘ Dacă $n = 20$, atunci $m \cdot n \le 497$, deci $n = 20 \le m \le 24$ și m are 6 divizori, deci $m = 20$. Înlocuind în $m * n = 497$ avem:

  $$20 * 20 = 1 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + 10^2 + 20^2 = 546 \neq 497 \implies \text{imposibil}$$

Obținem soluțiile $(m, n) \in \Big\{(18, 20), (20, 18)\Big\}$.

Barem:

- Cu alegerea că $n \le m$ demonstrează că $n \le 22$ 1p
- Observația $k \le 6$ 1p

- Cazurile k prim și $k = 1$ 2p
- Cazul $k = 4$ 1p
- Cazul $k = 6$ și obținerea soluțiilor ... 2p

□

Problema 2
Andrei colorează toate numerele întregi pozitive. El are la dispoziție oricâte culori sunt necesare astfel încât să fie respectate următoarele reguli:

- fiecare număr impar este colorat în albastru;
- orice număr întreg pozitiv n are aceeași culoare cu $4n$.
- orice număr întreg n are aceeași culoare cu cel puțin unul dintre întregii $n + 2$ sau $n + 4$.

Să se demonstreze că Andrei a colorat cu albastru toate numerele.

Demonstrație:
Presupunem prin absurd că nu toate numerele naturale sunt colorate cu albastru. Există n cel mai mic număr care nu este colorat cu albastru. Orice număr impar este colorat cu albastru, deci n este par. Dacă $4 \mid n$, atunci cum n, $\frac{n}{4}$ au aceeași culoare, iar $\frac{n}{4}$ este mai mic decât n, obținem că $\frac{n}{4}$ este albastru, contradicție. Prin urmare, $n = 4k + 2$. Cum $k + 1$, $k + 2$, $\cdots$, $4k + 1$ sunt mai mici decât $n = 4k + 2$, rezultă că $k + 1$, $k + 2$, $\cdots$, $4k + 1$ sunt albastre, deci $4(k + 1)$, $4(k + 2)$, $\cdots$, $4(4k + 1)$ sunt albastre. Știm că $4k + 2$ are aceeași culoare ca și $4k + 4$ sau $4k + 6$. Cum $4k + 4$ este albastru, obținem că $4k + 6$ nu este albastru. Analog $4k + 6$ are aceeași culoare cu $4k + 8$ sau $4k + 10$, dar $4k + 8$ este albastru, deci $4k + 10$ nu este albastru. Procedând în mod analog obținem că $16k + 6$ nu este albastru. Avem $4(4k + 2) = 16k + 8$, deci $16k + 8$ nu este albastru. Deci $16k + 4$ are aceeași culoare cu $4k + 1$, adică albastru, iar $16k + 6$ sau $16k + 8$ au aceeași culoare cu $16k + 4$, o contradicție. Prin urmare, toate numerele naturale sunt colorate cu albastru.

Barem:

- Demonstrația $n = 4k + 2$ 2p
- Observația că $4(4k + 1)$ este albastru 1p
- Demonsția că numerele de forma $4t + 2$ nu sunt albastre 2p
- Obținerea contradicție pentru $16k + 6$, $16k + 8$ care nu sunt albastre 2p

□

Problema 3

După desfășurarea turneului de handbal Suedia-Norvegia-Danemarca s-a constatat că fiecare echipă are un număr diferit de puncte față de celelalte echipe, iar cele 6 echipe ale Suediei au acumulat atâtea puncte câte au acumulat toate celelalte 12 echipe la un loc. Demonstrați că printre echipele din Suedia există cel puțin una care s-a numărat printre laureați (adică a ocupat unul dintre primele trei locuri).

Observații:

- *Într-un turneu o echipă joacă cu oricare altă echipă 2 meciuri: unul pe teren propriu și celălalt pe terenul adversarei.*
- *Pentru victorie o echipă primește 2 puncte, în caz de egalitate fiecare echipă primește 1 punct, iar pentru înfrângere 0 puncte.*

Demonstrație:
Notăm numărul de puncte câștigate de echipele din Suedia (fiecare în parte) cu $s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_6$ și celelalte echipe cu $e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_{12}$. Avem:

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_6 = e_1 + e_2 + \cdots + e_{12}$$

Numărul total de puncte al tuturor echipelor din turneu este $4 \cdot C_{18}^2 = 4 \cdot \frac{18\cdot 17}{2} = 2 \cdot 18 \cdot 17 = 612$ puncte. Obținem deci:

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_6 = 18 \cdot 17 = 306$$

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_{12} = 18 \cdot 17 = 306$$

Considerăm , fără a restrânge generalitatea că $s_1 < s_2 < \cdots < s_6$ și $e_1 < e_2 < \cdots < e_{12}$. Atunci:

$$s_1 + 5 \leq s_6;\ \ s_2 + 4 \leq s_6;\ \ s_3 + 3 \leq s_6;\ \ s_4 + 2 \leq s_6;\ \ s_5 + 1 \leq s_6$$

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_6 + 15 \leq 6 \cdot s_6 \implies s_6 \geq 53,5 \implies s_6 \geq 54$$

Numărul de puncte pe care îl obțin jucând între ele echipele $e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_9$ este $4 \cdot C_9^2$. Obținem:

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_9 \geq 4 \cdot C_9^2 = 4 \cdot \frac{9 \cdot 8}{2} = 144$$

Cum $e_{10} < e_{11} < e_{12}$ avem $3e_{10} + 3 \leq e_{10} + e_{11} + e_{12}$, deci:

$$144 + (3e_{10} + 3) \leq (e_1 + e_2 + \cdots + e_9) + (e_{10} + e_{11} + e_{12}) = 306 \implies$$

$$3e_{10} \leq 159 \implies e_{10} \leq 53 < 54 \leq s_6$$

Am obținut că $s_6 > e_{10}$, deci echipa din Suedia care a obținut s_6 puncte este un laureat.

Demonstrație alternativă (neformală):
Numărul total de puncte al tuturor echipelor din turneu este $18 \cdot 17 \cdot 2 = 612$ puncte. Deci, echipele din Suedia au luat în total 306 puncte. Echipa din Suedia care a acumulat cele mai multe puncte are cel puțin 54 de puncte, altfel echipele din Suedia ar acumula în total cel mult $53 + 52 + 51 + 50 + 49 + 48 = 303$ puncte. Presupunem că printre echipele din Suedia nu există un laureat. Atunci cele trei echipe de pe podium ar trebui să acumuleze cel puțin $55 + 56 + 57 = 168$ de puncte. În plus, echipele din Norvegia și Danemarca care nu sunt premiate ar împărți între ele $9 \cdot 8 \cdot 2 = 144$ puncte, adică echipele din cele două țări acumulează împreună cel puțin 312 puncte, mai multe decât cele din Suedia. Am ajuns la o contradicție.

Barem:

- Calcularea numărului total de puncte .... $1p$
- Ideea de a ordona punctajele .... $1p$
- Observația că $s_6 \geq 54$ .... $2p$
- Observația că $e_1 + e_2 + \cdots + e_9 \geq 4 \cdot C_9^2 = 4 \cdot \frac{9 \cdot 8}{2} = 144$ .... $1p$
- $3e_{10} + 3 \leq e_{10} + e_{11} + e_{12}$ și $e_{10} < s_6$ .... $2p$

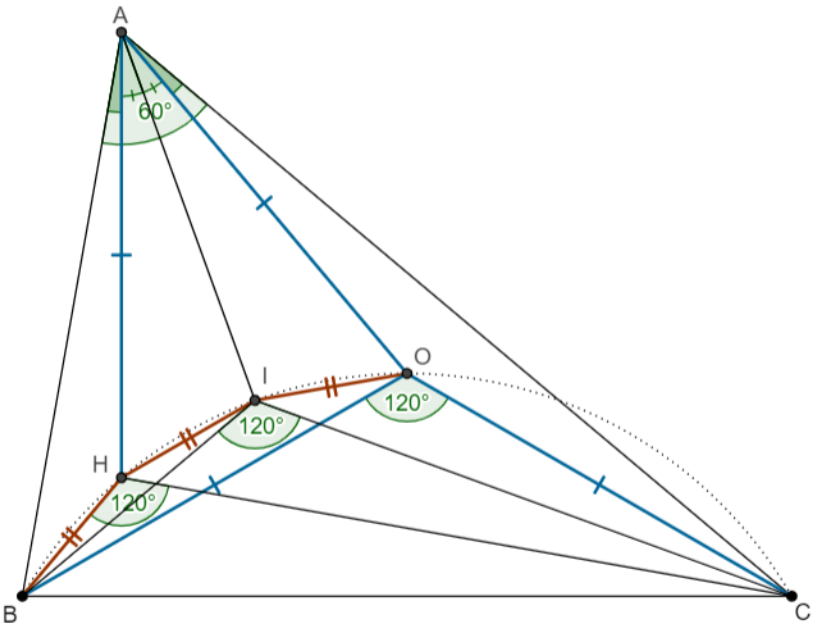
□

Problema 4

În $\triangle ABC, m(\angle B) = 80°, m(\angle C) = 40°, O$ este centrul cercului circumscris, I este centrul cercului înscris şi H este ortocentrul. Arătați că patrulaterul $BHIO$ este un trapez isoscel.

Mihaela Berindeanu, profesor, București

Demonstraţie:
Notez cu R raza cercului circumscris.



În $\triangle ABC, m(\angle A) = 180° - (40° - 80°) = 60°$ Demonstrez că B, H, I, O, C sunt puncte conciclice

$$\left.\begin{array}{l} m(\angle BHC) = 180° - m(\angle A) = 180° - 60° = 120° \\ m(\angle BOC) = 2m(\angle BAC) = 2 \cdot 60° = 120° \\ m(\angle BIC) = 90° + \dfrac{m(\angle BAC)}{2} = 90° + 30° = 120° \end{array}\right\} \Rightarrow B, H, I, O, C \text{ conciclice}$$

Demonstrez că $\triangle AHI \equiv \triangle AOI$.
Triunghiul $\triangle OBC$ cu $OB = OC = R$ este isoscel, deci $m(\angle OCB) = \dfrac{180° - 120°}{2} = 30°$

(BI este bisectoare, deci $m(\angle IBC) = \dfrac{80^\circ}{2} = 40^\circ \Rightarrow m(\angle IBO) = 10^\circ \Rightarrow m(\overset{\frown}{\text{IO}}) = 20^\circ$

$$AH = 2R\cos A = 2R \cdot \frac{1}{2} = R \Rightarrow AH = AO$$
$$m(\angle HAB) = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$$
$$m(\angle OAC) = \frac{180^\circ - 160^\circ}{2} = 10^\circ$$

(AI este bisectoare, deci $m(\angle IAH) = m(\angle IAO) = 20^\circ$

$$\left.\begin{array}{l} AI = AI \\ AH = AO = R \\ \angle IAH = \angle IAO = 20^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AHI \equiv \triangle AOI$$

Vom demonstra că $BHIO$ este trapez isoscel. Din $\triangle AHI \equiv \triangle AOI \Rightarrow IH = IO \Rightarrow \overset{\frown}{\text{IH}} = 20^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{\text{BH}} = 60^\circ - 20^\circ - 20^\circ = 20^\circ \Rightarrow BHIO$ este trapez isoscel.

Barem:

- Demonstrația pentru B, H, I, O, C conciclice . . . . $2p$
- $\triangle AHI \equiv \triangle AOI$ . . . . $2p$
- $m(\angle IBO) = 10^\circ$ și $m(\overset{\frown}{\text{IO}}) = 20^\circ$ . . . . $1p$
- $BHIO$ este trapez isoscel pentru că $m(\overset{\frown}{\text{BH}}) = m(\overset{\frown}{\text{HI}}) = m(\overset{\frown}{\text{IO}}) = 20^\circ$ . . . . $2p$

□

Problemele 1-4: . . . . $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: . . . . $0p$
Total: . . . . $28p$