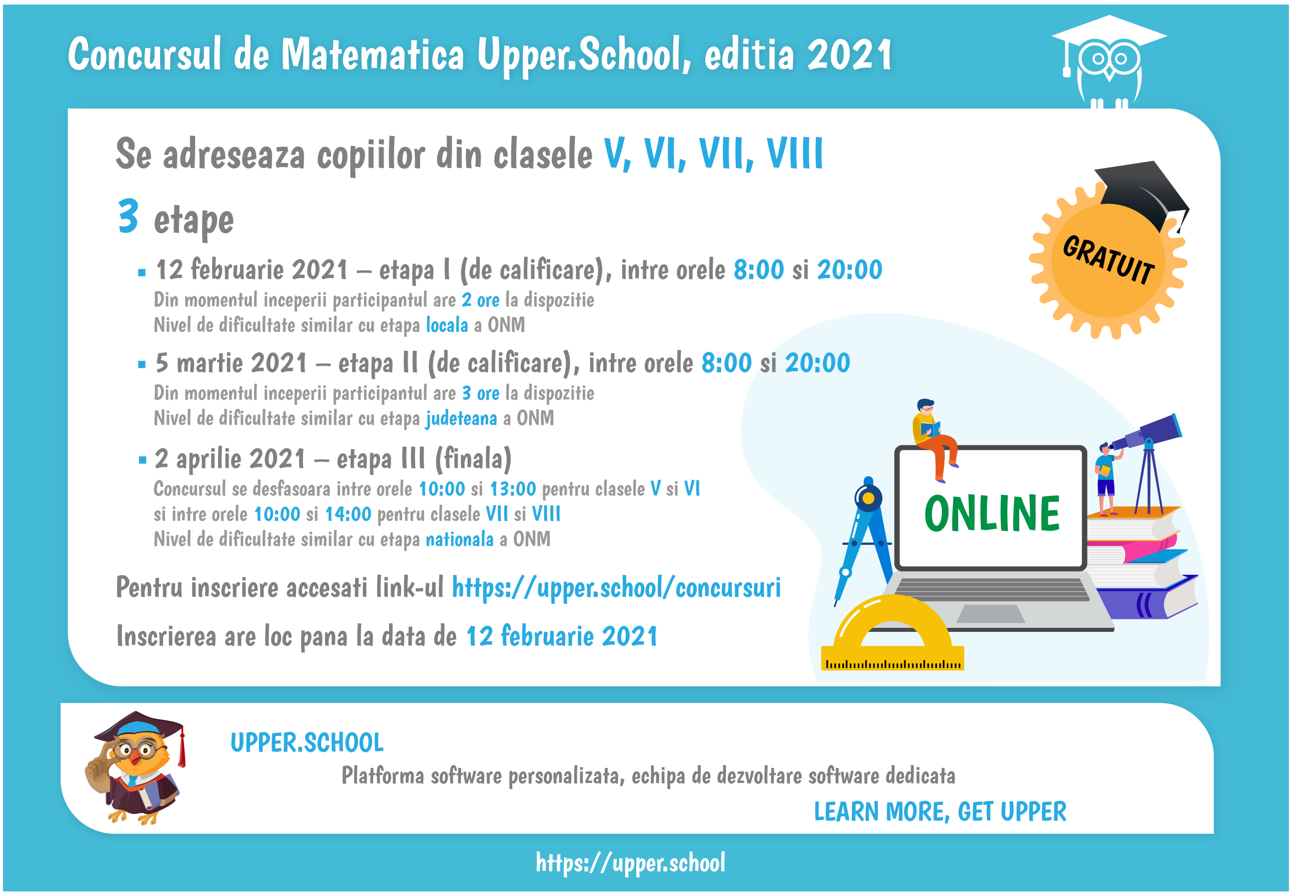


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2021

Etapa III
Clasa a VIII-a

- Soluții -

Selecție probleme

Prof. Lioara Ivanovici

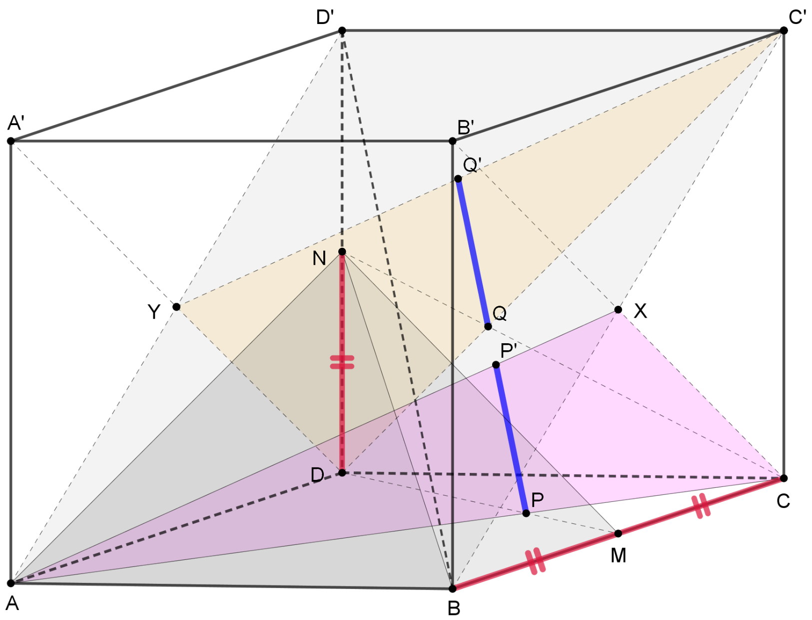
§1 Soluții

Problema 1

Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi punctele $M \in (BC)$, $N \in (DD')$. Se notează $AC \cap DM = \{P\}$ şi $NC \cap DC' = \{Q\}$. Ştiind că $PQ \parallel (ABD')$, determinaţi poziţia punctelor M şi N pentru care volumul tetraedrului $NDBM$ este maxim.

Mihaela Berindeanu, profesor, București

Demonstraţie:



Din $PQ \parallel (ABD') \Rightarrow PQ \parallel (ABD'C') \Rightarrow d\,(P, ABD'C') = d\,(Q, ABD'C')$
Notez $CB' \cap BC' = \{X\}$, $AD' \cap A'D = \{Y\}$

Din $\left| \begin{array}{l} CX \perp BC' \\ CX \perp AB \end{array} \right. \Rightarrow CX \perp (ABC'D')$. Analog $A'D \perp (ABC'D')$
Construim $PP' \perp AX \Rightarrow PP' \perp (ABC'D')$
Construim $QQ' \perp YC' \Rightarrow QQ' \perp (ABC'D')$
Din $PQ \parallel (ABC'D') \Rightarrow PP' = QQ'$
Dar $\triangle ACX \equiv \triangle C'DY$

$$QQ' = PP' \Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{C'Q}{C'D}$$

$$AC = C'D \Rightarrow \left| \begin{array}{l} AP = C'Q \\ PC = DQ \end{array} \right.$$

Din paralelism

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{AP}{PC} = \dfrac{AD}{CM} \\ \dfrac{C'Q}{PQ} = \dfrac{CC'}{DN} \end{array} \right| \Rightarrow \frac{AD}{CM} = \frac{CC'}{DN}$$

Deci condiţia $PQ \parallel (ABC'D') \Rightarrow CM = DN$

Notez $CM = DN = x,\ AB = a \Rightarrow$

$$V(NDBM) = \frac{\sigma(BMD) \cdot ND}{3} = \frac{\frac{(a-x)\cdot a}{2} \cdot x}{3} = \frac{a}{6} \cdot (a-x) \cdot x \leq \frac{a^3}{24}$$

Dar $\sqrt{x(a-x)} \leq \frac{x+a-x}{2} = \frac{a}{2}$, cu egalitate pentru $x = a - x$.
Cazul de egalitate $a = 2x$ indică faptul că volumul maxim al tetraedrului $NDBM$ se obţine când poziţia punctului M, respectiv N este la mijlocul muchiei BC, respectiv DD'.

Barem:

- Demonstează relația CM=DN .... $3p$
- Aplică inegalitatea mediilor .... $3p$
- Scrie și demonstrează care sunt pozițiile punctelor pentru care se obține valoarea maximă .... $1p$

$\square$

Problema 2

Găsiți toate numerele prime p și toate numere întregi pozitive n astfel încât

$$n^8 - n^2 = p^5 + p^2.$$

Demonstraţie:
Dacă $n = 2$ obținem $p^2(p^3+1) = 252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ și $p = 3$. Astfel, $(n, p) = (2, 3)$ este o soluție.
Cum ambii membrii ai inegalității sunt crescători, putem presupune acum $n \geq 3$ și $p > 3$.
Identitatea poate fi rescrisă astfel

$$n^2(n-1)(n^2-n+1)(n^2+n+1) = p^2(p^3+1).$$

- *Cazul 1:* $p \mid n$ sau $p \mid n-1$
  În acest caz, $p \leq n$, de unde $p^3 + 1 \leq n^3 + 1$. Așadar, $p^2(p^3+1) = (n^3-1)n^2(n^3+1) \leq n^2(n^3+1)$, ce implică $n^3 - 1 \leq 1$, imposibil!
- *Cazul 2:* $p \mid n+1$
  Dacă $p < n+1$, obținem contradicție în mod similar.
  Dacă $p = n+1$, cum $n \equiv -1 \pmod p$, obținem $n^2(n-1) \equiv -2 \pmod p$, $n^2 - n + 1 \equiv 3 \pmod p$ și $n^2 + n + 1 \equiv 1 \pmod p$, de unde $p^2 \nmid n^8 - n^2$, fals!
- *Cazul 3:* $n \not\equiv -1, 0, 1 \pmod p$
  În acest caz, $p^2 \mid (n^2-n+1)(n^2+n+1)$. Cum cel mai mare divizor comun al lui n^2+n+1 și n^2-n+1 este, în mod clar, 1, obținem că $p^2 \mid n^2-n+1$ sau $p^2 \mid n^2+n+1$.
  Astfel, $p^2 \leq n^2+n+1 < (n+1)^2 \implies p \leq n$, ce duce la contradicție după cum am văzut în cazul 1.

Barem:

- Cazul $n = 2$ și cazul p divide n sau $n-1$ .... $1p$
- Rescrierea ecuației ca $n^2(n-1)(n^2-n+1)(n^2+n+1) = p^2(p^3+1)$ .... $2p$

- Cazul p divide $n+1$ .... $1p$
- Cazul $n \not\equiv -1, 0, 1 \pmod{p}$ .... $3p$

□

Problema 3

Se aleg 21 de numere din mulțimea $\{1, 2, 3, ..., 2046\}$. Este posibil să găsim trei numere a, b, c printre cele 21 de numere astfel încât $bc < 2a^2 < 4bc$?

Demonstrație:
Considerăm următoarele mulțimi:

$$S_1 = \{1, 2, 3\}$$

$$S_i = \{2^i, 2^i + 1, \cdots, 2^{i+1} - 1\}, \text{ pentru } i = \overline{2, 9}$$

$$S_{10} = \{2^{10}, 2^{10} + 1, \cdots, 2^{11} - 2\}$$

Fie $a, b, c \in S_i$ cu $b < a < c$ pentru orice $i \in \{1, 2, ..., 10\}$. Vom demonstra că $bc < 2a^2 < 4bc$. Avem $b < a$ și $2^i \leq a$, deci $2^{i+1} \leq 2a$, iar $c \leq 2^{i+1} - 1$ de unde:

$$bc \leq b \cdot \left(2^{i+1} - 1\right) < b \cdot 2^{i+1} \leq a \cdot 2a = 2a^2$$

Analog avem $a < c$ și $2a \leq 4b$, deoarece $a \leq 2^{i+1} - 1 < 2^{i+1} \leq 2b$, prin urmare $2a^2 < 4bc$.
Conform Principiului cutiei, dacă alegem 21 de numere din multimea $\{1, 2, 3, ..., 2046\}$, va exista o mulțime S_i din care alegem 3 numere a, b, c cu $b < a < c$. Din observația de mai sus rezultă concluzia.

Barem:

- Considerarea mulțimiilor S_i .... $3p$
- Demonstrația faptului că oricum am alege 3 elemente $a,\ b,\ c \in S_i$ ele satisfac $bc < 2a^2 < 4bc$ .... $3p$
- Finalizare folosind principiul cutiei .... $1p$

□

Problema 4

Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$, numere naturale. La fiecare pas alegem la întâmplare doi indici $i < j$ astfel încât $a_i \nmid a_j$ și schimbăm numerele a_i și a_j cu cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al acestora. Arătați că acest proces se termină și că șirul astfel creat nu depinde de alegerile făcute.

Demonstrație:
Fie $p_1, p_2, \dots, p_k$, factorii primi care se află în descompunerea în factori primi a numerelor $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ sau a_n.

Numărului a_i îi asociem $k-uplul$ $(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{k,i})$ de exponenți ai numerelor $p_1, p_2, \dots, p_k$ din descompunerea lor în factori primi. Dacă la un pas alegem $i < j$ cu $a_i \nmid a_j$, $k-uplele$ asociate lor devin:

$$(min\,(x_{1,i}, x_{1,j})\,, min\,(x_{2,i}, x_{2,j})\,, \dots, min\,(x_{k,i}, x_{k,j}))$$

și

$$(max\,(x_{1,i},x_{1,j})\,,max\,(x_{2,i},x_{2,j})\,,\ldots,max\,(x_{k,i},x_{k,j}))\,.$$

Notăm mutarea (i,j).

O prima observație: cele kn numere $x_{i,j}$ nu sunt, în ansamblu, modificate, ci permutate. Mai mult, starea ce nu permite nicio mișcare este cea în care pentru fiecare $t=\overline{1,k}$, avem

$$x'_{t,1}\leq x'_{t,2}\leq\cdots\leq x'_{t,n},$$

unde $x'_{i,j}$ este exponentul lui p_i în numărul situat, la final, pe poziția j.

Rămâne de arătat că starea sus-menționată se obține, și se obține indiferent de succesiunea mutărilor efectuate. Pentru aceasta, fie

$$X_0=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{j,i}-i)^2.$$

După mutarea (t,s), $t<s$, notăm $x'_{j,i}$ toate cele nk numere. Avem

$$x'_{j,i}=x_{j,i},\quad \forall i\in\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{t,s\}$$

și $x'_{j,t}=min(x_{j,t},x_{j,s})$, $x'_{j,s}=max(x_{j,t},x_{j,s})$, $j=1,2,\ldots,k$.

Cum $a_t\nmid a_s$, există cel puțin un $j=1,2,\ldots,k$ cu $x_{j,t}>x_{j,s}$, deci cu $x'_{j,t}=x_{j,s}$ și $x'_{j,s}=x_{j,t}$.

Reținem că $(x'_{j,t}-t)^2+(x_{j,s}-s)^2-(x_{j,t}-t)^2-(x_{j,s}-s)^2=2(x_{j,t}-x_{j,s})(t-s)<0$, dacă $x_{j,t}>x_{j,s}$ și este 0 dacă $x_{j,t}=x_{j,s}$.

Urmează că

$$X_1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x'_{j,i}-i)^2<X_0,$$

ceea ce, corelat cu faptul că lista $(x_{i,j})$ este doar permutată de o mutare, arată că numărul mutărilor posibile este finit.

Starea care nu permite nicio mutare a fost descrisă anterior și soluția este completă.

Barem:

- Asocierea k-uplului pentru fiecare a_i . . . . $2p$
- Scrierea stării finale . . . . $2p$
- Demonstrarea faptului că starea finală se obține și că procesul se termină . . . . $3p$

> **Observație.** Se acordă 3 puncte pentru demonstrația faptului că procesul se termină, iar 4 puncte pentru demonstrarea faptului că starea finală nu depinde de alegerile făcute.

□

Problemele 1-4: . . . . $4\times 7p=28p$
Puncte acordate din oficiu: . . . . $0p$
Total: . . . . $28p$