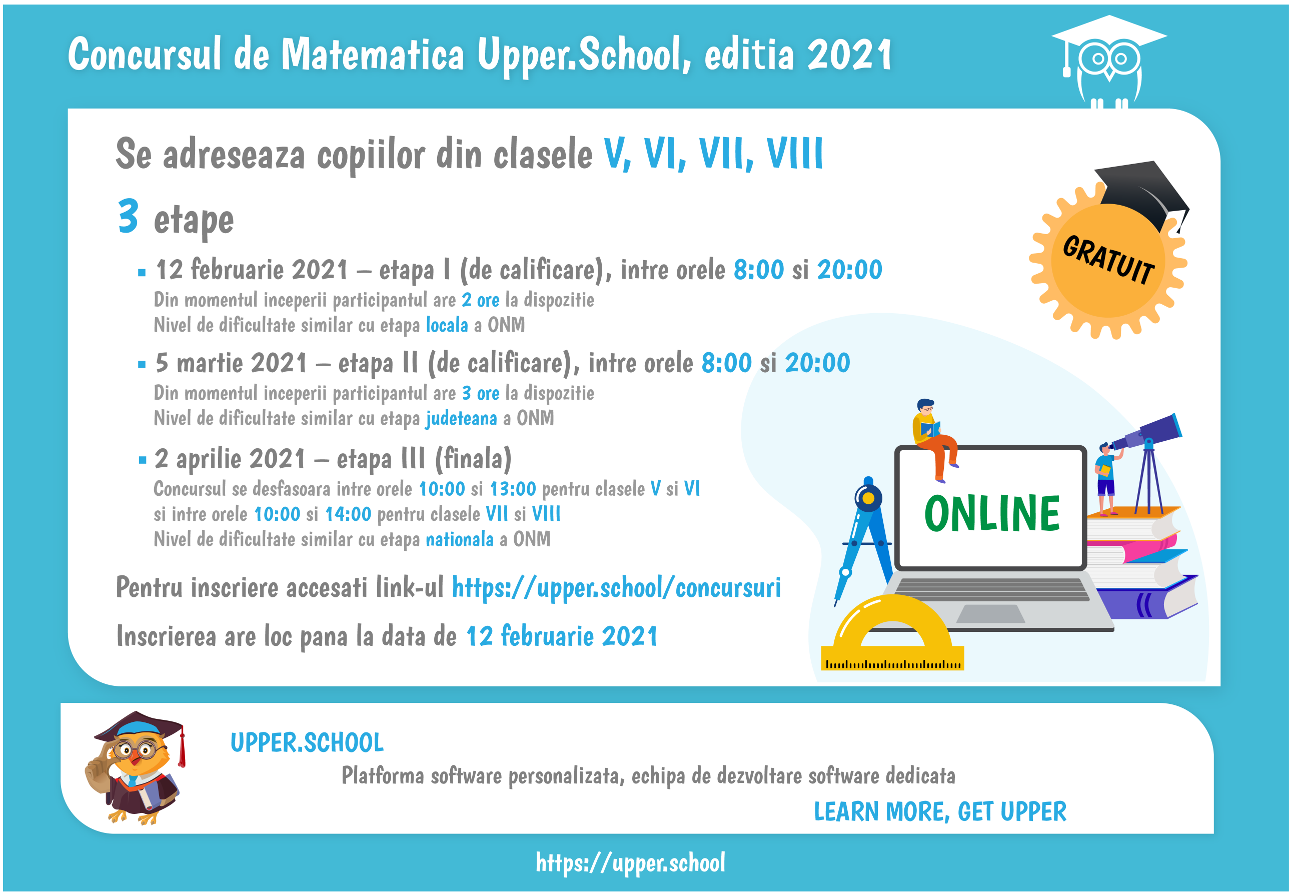

Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2021

Etapa III
Clasa a VII-a

- Subiecte -

Selecție probleme
Prof. Lioara Ivanovici

§1 Subiecte

Problema 1

Pentru toate perechile de numere întregi pozitive (m, n) astfel încât m și n au același număr de divizori vom defini operația $*$ astfel: dacă $1 = m_1 < m_2 < m_3 < ... < m_k = m$ sunt toți divizorii lui m, iar $1 = n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k$ sunt toți divizorii lui n atunci $m * n = m_1 \cdot n_1 + m_2 \cdot n_2 + ... + m_k \cdot n_k$. Aflați perechile de numere (m, n) pentru care $m * n = 497$.

Problema 2

Andrei colorează toate numerele întregi pozitive. El are la dispoziție oricâte culori sunt necesare astfel încât să fie respectate următoarele reguli:

- fiecare număr impar este colorat în albastru;
- orice număr întreg pozitiv n are aceeași culoare cu $4n$.
- orice număr întreg n are aceeași culoare cu cel puțin unul dintre întregii $n + 2$ sau $n + 4$.

Să se demonstreze că Andrei a colorat cu albastru toate numerele.

Problema 3

După desfășurarea turneului de handbal Suedia-Norvegia-Danemarca s-a constatat că fiecare echipă are un număr diferit de puncte față de celelalte echipe, iar cele 6 echipe ale Suediei au acumulat atâtea puncte câte au acumulat toate celelalte 12 echipe la un loc. Demonstrați că printre echipele din Suedia există cel puțin una care s-a numărat printre laureați (adică a ocupat unul dintre primele trei locuri).

Observații:

- *Într-un turneu o echipă joacă cu oricare altă echipă 2 meciuri: unul pe teren propriu și celălalt pe terenul adversarei.*
- *Pentru victorie o echipă primește 2 puncte, în caz de egalitate fiecare echipă primește 1 punct, iar pentru înfrângere 0 puncte.*

Problema 4

În $\triangle ABC, m(\angle B) = 80°, m(\angle C) = 40°, O$ este centrul cercului circumscris, I este centrul cercului înscris şi H este ortocentrul. Arătați că patrulaterul $BHIO$ este un trapez isoscel.

Mihaela Berindeanu, profesor, București

Problemele 1-4: .... $4 \times 7p = 28p$
Puncte acordate din oficiu: .... $0p$
Total: .... $28p$