



Concursul de matematică Upper.School Ediția 2022

Etapa I
Clasa a V-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Care este cel mai mic număr natural impar de trei cifre care împărțit la 37 dă restul 12?

- a) 12 b) 49 c) 123 d) 111

Demonstrație. Căutăm numărul de forma \overline{abc} astfel încât $\overline{abc} = 37 \cdot k + 12$, unde k este un număr natural impar. Cum $100 = 37 \cdot 2 + 26$ rezultă că pentru $k = 3$ găsim soluția căutată, adică $37 \cdot 3 + 12 = \boxed{123}$.

Răspuns corect: a) b) c) d) 5p

Problema 2

La ce număr se împart exact toate numerele din șirul 5, 15, 45, 60, 11?

- a) 2 b) 5 c) 0 d) 1

Demonstrație. Primele patru numere se împart exact la 1 și 5, dar 11 nu se împarte exact la 5, prin urmare singurul care verifică cerința problemei este $\boxed{1}$.

Răspuns corect: a) b) c) d) 5p

Problema 3

Mai multe fete s-au așezat la o masă rotundă. Ana observă ca la stânga ei, până la Veronica sunt 7 fete, iar la dreapta ei, tot până la Veronica sunt 9 fete. Câte fete sunt la masă?

- a) 16 b) 14 c) 17 d) 18

Demonstrație. Numărul fetelor care stau la masă este format din cele 7 care sunt în stânga Anei, cele 9 care sunt în dreapta Anei, Veronica și Ana. În total sunt $\boxed{18}$ fete.

Răspuns corect: a) b) c) d) 5p

Problema 4

Pe un taler al unei balanțe sunt puse 15 portocale, iar pe celălalt taler sunt doi pepeni. Dacă mai așezăm lângă pepeni încă o portocală, balanța se echilibrează. Câte portocale cântăresc exact cât un pepene?

- a) 5 b) 12 c) 6 d) 7

Demonstrație. 15 portocale cântăresc cât 2 pepeni și o portocală, deci 14 portocale cântăresc cât 2 pepeni, adică un pepene cântărește cât $\boxed{7}$ portocale.

Răspuns corect: a) b) c) d) 5p

Problema 5

Dacă a este un număr natural par, iar b este un număr natural impar, care dintre următoarele numere este impar?

- a) $a^2 + 2022 \cdot ab$ b) $ab + b^2$ c) $2021ab + 2022b^2$ d) $a^2 + 2022b^2$

Demonstrație. $a^2 + 2022 \cdot ab$ este număr par pentru că 2022 este par și a^2 este tot par, prin urmare suma lor este număr par.

$2021 \cdot ab$ este număr par pentru că a este număr par, iar $2022 \cdot b^2$ este număr par pentru că 2022 este par și suma lor este pară.

a^2 este număr par, ridicarea la putere nenulă nu modifică paritatea, iar $2022 \cdot b^2$ este număr par pentru că 2022 este număr par, prin urmare și suma lor este număr par.

Singurul număr impar este $ab + b^2$ pentru că ab este par și b^2 este impar.

Răspuns corect: b) 5p

Problema 6

Un număr de 5 cifre are produsul cifrelor egal cu 6. Cea mai mare valoare posibilă a sumei cifrelor este:

- a) 10 b) 6 c) 9 d) 8

Demonstrație. Numărul 6 poate fi scris ca produs de cinci cifre astfel: $6 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6$ sau $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$. Cea mai mare sumă se obține în primul caz și este egală cu 10.

Răspuns corect: a) 5p

Problema 7

Care este valoarea unei optimi din 8^{2022} ?

- a) 2^{6065} b) 4^{4014} c) 2^{6063} d) 8^{2019}

Demonstrație.

$$8^{2022} = (2^3)^{2022} = 2^{6066}$$

$$8^{2022} : 8 = 2^{6066} : 2^3 = 2^{6066-3} = \span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">2^{6063}$$

Răspuns corect: c) 5p

Problema 8

Câte numere naturale de trei cifre sunt exact cu 36 mai mari decât un număr de două cifre?

- a) 36 b) 38 c) 39 d) 900

Demonstrație. Ideea principală este de a-l determina pe cel mai mic și pe cel mai mare. Cum $100 = 36 + 64$, înseamnă că 100 este cel mai mic, iar $99 + 36 = 135$, deci 135 este cel mai mare. În total sunt $135 - 99 = \boxed{36}$ numere.

Răspuns corect: a) 5p

Problema 9

De-a lungul unui gard sunt 8 pruni. Bunicul îi spune lui Andrei: "Am numărat fructele din fiecare copac și am observat că numărul de fructe dintre oricare doi pruni vecini diferă cu 1 și nu am găsit copac în care să fie măcar 100 de prune. Tu știi care este numărul maxim de fructe din toți cei 8 pruni la un loc?" Andrei a aflat răspunsul corect. Care este acesta?

a) 788

b) 197

c) 800

d) 799

Demonstrație. Ca suma să fie cât mai mare trebuie ca numerele să fie cele mai mari posibile. Cum nu există niciun copac în care să fie măcar 100 de fructe, înseamnă că numerele sunt de cel mult două cifre. Cele mai mari numere care pot reprezenta numărul prunelor din copaci sunt 99, 98, 99, 98, 99, 98, 99, 98, iar suma lor este $\boxed{788}$.

Răspuns corect: a) 5p

Problema 10

Care este cel mai mare număr natural par de 5 cifre pentru care fiecare cifră, începând cu prima, este mai mare strict decât cea care urmează după ea?

a) 86420

b) 98765

c) 98764

d) 12346

Demonstrație. Cifrele numărului sunt în ordine strict descrescătoare de la dreapta la stânga. Cel mai mare număr de cinci cifre cu cifrele ordonate descrescător este 98765, dar acesta nu este par. Se modifică ultima cifră și rezultatul este $\boxed{98764}$.

Răspuns corect: c) 5p

Problema 11

Ana poate mânca singură o pizza într-o oră, Bogdan poate mânca singur aceeași pizza în jumătate de oră, iar Cristi poate mânca singur aceeași pizza în 20 de minute. În cât timp pot mânca cei trei copii împreună trei pizza?

a) 40 minute

b) 20 minute

c) 60 minute

d) 30 minute

Demonstrație. Într-o oră Ana mănâncă o pizza, Bogdan două și Cristi trei. Într-o oră cei trei copii mănâncă împreună 6 pizza, adică în $\boxed{30 \text{ minute}}$ mănâncă împreună 3 pizza.

Răspuns corect: d) 5p

Problema 15

Monica efectuează corect pe o foaie de hârtie o înmulțire de două numere a câte două cifre fiecare. Vladimir șterge trei dintre cifre și le înlocuiește cu litere astfel:

$$\overline{A3} \times \overline{2B} = \overline{3C2}.$$

Știind că literele diferite nu reprezintă neapărat cifre distincte, aflați suma celor trei cifre care au fost înlocuite de litere.

- a) 6 b) 5 c) 4 d) 9

Demonstrație. Ultima cifră a produsului este 2, deci $3 \times B$ are ultima cifră 2. Prin urmare, $B = 4$ de unde observăm că numărul $\overline{3C2}$ se împarte exact la 24. Numerele de trei cifre divizibile cu 24 care au cifra sutelor egală cu 3 sunt 312, 336, 360 și 384, iar singurul de această formă este 312. Obținem $A = 1$ și $C = 1$. Suma celor trei cifre este $A + B + C = 1 + 4 + 1 = \boxed{6}$.

Răspuns corect: a) 5p □

Problema 16

Heidi, Luca și Gabi au fiecare câte o mașinuță de jucărie, verde sau roșie. Toți trei spun doar minciuni:

- Heidi: "*Mașina mea are aceeași culoare ca mașina lui Gabi*".
- Gabi: "*Mașina mea are aceeași culoare ca a lui Luca*".
- Luca: "*Noi trei avem două mașinuțe verzi*".

Din aceste propoziții se pot obține următoarele concluzii, unele adevărate, altele false:

- $C_1 \rightarrow$ Heidi are o mașinuță verde.
- $C_2 \rightarrow$ Luca are o mașinuță roșie.
- $C_3 \rightarrow$ Heidi și Luca au mașini de aceeași culoare.
- $C_4 \rightarrow$ Gabi și Luca au mașinuțe roșii.
- $C_5 \rightarrow$ Heidi și Luca au mașinuțe verzi.

Care dintre concluziile de mai sus sunt adevărate?

- a) C_1 și C_2 b) C_2 și C_3 c) C_1 și C_3 d) C_4

Demonstrație. Din P_1 : Heidi și Gabi au mașini de culori diferite.
 Din P_2 : Gabi și Luca au mașini de culori diferite.
 Din P_3 : Mașinuțe verzi nu pot fi două. Dacă ar fi 3, ar fi o contradicție cu P_1 sau P_2 , deci cu certitudine există o singură mașinuță verde.
 Din P_1 și P_2 , Heidi și Luca au mașini de aceeași culoare, deci au mașini roșii. Gabi are o mașina de culoare diferită, deci verde. Prin urmare, sunt adevărate C_2 și C_3 .

Răspuns corect: b) 5p

□

Problemele 1-16:	$16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu:	$20p$
Total:	$100p$
Timp de lucru:	2 ore