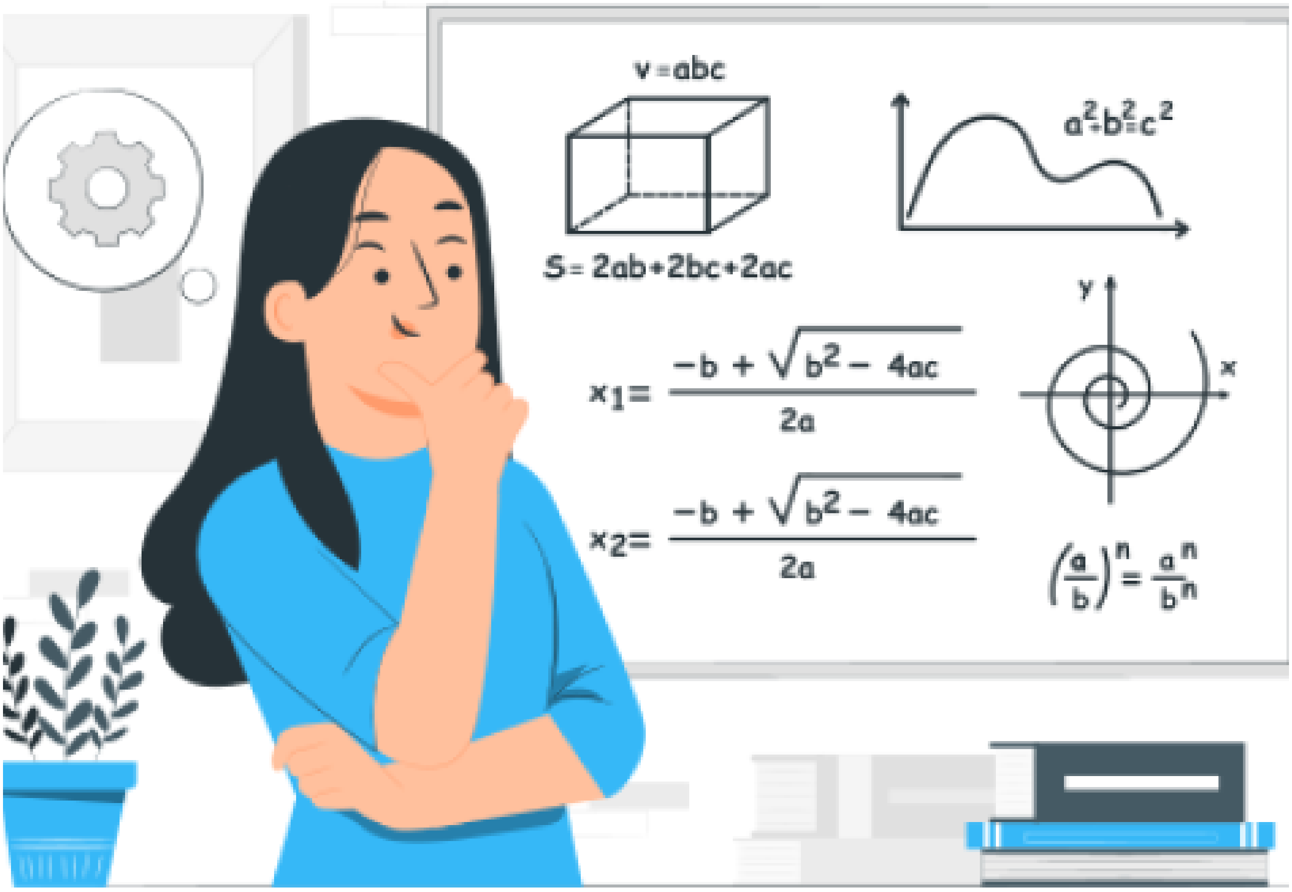


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022

Etapa I
Clasa a VI-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

$2^3 + 3^2 = ?$

a) $1^3 + 5^2$ b) $2^4 + 3$ c) $1^8 + 3^2$ d) $1^9 + 2^4$

Demonstrație. $2^3+3^2 = 8+9 = 17$, $1^3+5^2 = 1+25 = 26$, $2^4+3 = 16+3 = 19$, $1^8+3^2 = 1+9 = 10$ și $1^9 + 2^4 = 1 + 16 = 17$. Prin urmare, $2^3 + 3^2 = \boxed{1^9 + 2^4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ 5p

□

Problema 2

Care este ordinea crescătoare corectă pentru fracțiile $\frac{15}{11}, \frac{19}{15}$ și $\frac{17}{13}$?

a) $\frac{15}{11} < \frac{17}{13} < \frac{19}{15}$ b) $\frac{15}{11} < \frac{19}{15} < \frac{17}{13}$

c) $\frac{19}{15} < \frac{15}{11} < \frac{17}{13}$ d) $\frac{19}{15} < \frac{17}{13} < \frac{15}{11}$

Demonstrație. Să observăm că pentru fiecare fracție diferența dintre numărător și numitor este egală cu 4. Obținem astfel $\frac{15}{11} = 1 + \frac{4}{11}$, $\frac{19}{15} = 1 + \frac{4}{15}$ și $\frac{17}{13} = 1 + \frac{4}{13}$. Cum $\frac{4}{15} < \frac{4}{13} < \frac{4}{11}$, ordinea crescătoare a celor trei fracții este $\boxed{\frac{19}{15} < \frac{17}{13} < \frac{15}{11}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ 5p

□

Problema 3

Care este valoarea numărului natural n care verifică ecuația

$$\frac{5}{13} - \frac{2}{21} = \frac{19}{21} - \frac{n}{13}?$$

a) 5 b) 9 c) 11 d) 8

Demonstrație. $\frac{5}{13} - \frac{2}{21} = \frac{19}{21} - \frac{n}{13} \iff \frac{5+n}{13} = \frac{19+2}{21} \iff \frac{5+n}{13} = 1 \iff 5 + n = 13 \iff n = \boxed{8}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ 5p

□

Problema 4

La cursurile de pregătire pentru clasa a VI-a de la Upper.School profesorul de matematică are înscriși 32 de copii, iar profesorul de informatică 23. Exact un sfert dintre ei sunt înscriși la ambele cursuri. Câți copii de clasa a VI-a sunt înscriși la cursurile Upper.School?

a) 55 b) 33 c) 26 d) 44

Demonstrație. Vom nota cu n numărul de copii înscriși la Upper.School. Adunând 32 cu 25 obținem totalul copiilor pe care îi văd cei doi profesori la cursuri. Dintre aceștia $\frac{n}{4}$ reprezintă numărul copiilor care participă la ambele cursuri. Vom avea de rezolvat ecuația $23 + 32 = 55 = \frac{n}{4} + n \iff \frac{5n}{4} = 55 \iff 5n = 55 \cdot 4 \iff n = 44$. Numărul copiilor de clasa a VI-a înscriși la Upper.School este $\boxed{44}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ 5p

□

Problema 5

Andrei a înmulțit cinci numere naturale consecutive și a obținut numărul A. Bogdan a făcut același lucru, dar secvența lui de numere a început cu un număr mai mare cu 1 față de primul număr din secvența lui Andrei și a obținut rezultatul B. Care este cel mai mic număr din secvența lui Bogdan, știind că $\frac{A}{B} = \frac{4}{5}$?

a) 20 b) 21 c) 22 d) 24

Demonstrație. Notăm cu n cel mai mic număr din secvența lui Andrei, deci $A = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$. Bogdan începe cu numărul $n+1$ și obține $B = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$. Vom avea

$$\frac{4}{5} = \frac{A}{B} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} = \frac{n}{n+5}.$$

Ecuația aceasta este echivalentă cu $\frac{n}{n+5} = \frac{4}{5} \iff 4n + 20 = 5n \iff n = 20$. Cel mai mic număr din secvența lui Bogdan este $\boxed{21}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ 5p

□

Problema 6

Am făcut schimb de adrese cu noii mei prieteni din tabără și am constatat că cinci dintre ei au numerele apartamentelor exprimate prin numere prime: n, $n+2$, $n+6$, $2n+1$ și $n+14$. Care este suma celor cinci numere prime?

a) 57 b) 53 c) 49 d) 41

Demonstrație.

- dacă $n = 5k$, atunci n nu este prim pentru $k > 1$.
- dacă $n = 5k+1$, atunci $n + 14 = 5(k+3)$ nu este prim.

- dacă $n = 5k + 2$, atunci $2n + 1 = 5(2k + 1)$ nu este prim pentru $k > 0$.
- dacă $n = 5k + 3$, atunci $n + 2 = 5(k + 1)$ nu este prim pentru $k > 0$.
- dacă $n = 5k + 4$, atunci $n + 6 = 5(k + 2)$ nu este prim.

Rămân de analizat cazurile $n = 2$, $n = 3$ și $n = 5$, iar singura care convine este $n = 5$. Numerele sunt $n + 2 = 7$, $n + 6 = 11$, $2n + 1 = 11$, $n + 14 = 19$. Suma numerelor este $5 + 7 + 11 + 11 + 19 = \boxed{53}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 7

Dacă din numărul de 5 cifre x se scade numărul y, format prin inversarea cifrelor lui x, atunci diferența lor va fi sigur divizibilă cu:

a) 9 b) 2 c) 10 d) 8

Demonstrație.

$$x = \overline{abcde} = e + 10d + 100c + 1000b + 10000a$$

$$y = \overline{edcba} = a + 10b + 100c + 1000d + 10000e$$

$$x - y = 9999(a - e) + 990(b - d) = 99(101a + 10b - 10d - 101e)$$

Prin urmare, rezultatul este divizibil cu $\boxed{9}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

□

Problema 8

Dacă fracția $\dfrac{3n + 5}{4n + 3}$ este reductibilă, cu care dintre variantele propuse se poate simplifica?

a) 13 b) 3 c) 11 d) 5

Demonstrație. Fie $d \mid 3n + 5$, $d \mid 4n + 3$. Atunci:

$$d \mid 4 \cdot (3n + 5) = 12n + 20$$

$$d \mid 3 \cdot (4n + 3) = 12n + 9$$

$$\implies d \mid (12n + 20) - (12n + 9) \implies d \mid 11$$

Fracția se poate simplifica cu $\boxed{11}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 9

Sabina are mâine ultimul test la matematică din acest semestru. Ea face calculul mediei în avans și afirmă: "*Dacă voi lua* 9 *la test, media îmi crește cu* 0, 4 *puncte, dacă voi lua* 5, *media îmi scade cu* 0, 4". Care va fi media aritmetică cu două zeimale, fără rotunjire, a notelor obținute de Sabina la matematică dacă aceasta va lua 10 la test?

a) 7, 60 b) 7, 85 c) 8, 30 d) 6, 60

Demonstrație. Notăm cu m media înainte de test, iar cu x numărul notelor care dau această medie. Obținem relațiile:

$$\frac{mx+9}{x+1} = m + 0,4$$
$$\frac{mx+5}{x+1} = m - 0,4$$

Prin scăderea celor 2 relații avem:

$$\frac{4}{x+1} = 0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \implies x = 4$$

Cu 9 la test media este $\frac{4m+9}{5} = m + 0,4$, deci $4m + 9 = 5m + 2$, de unde $m = 7$, cu 10 la test media devine:

$$\frac{7 \cdot 4 + 10}{5} = \frac{38}{5} = \boxed{7,60}$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ 5p

□

Problema 10

Pentru a afla care este numărul de kilograme a celor cinci colete, acestea se cântăresc două câte două în toate modurile posibile. Se obțin valorile 7, 11, 12, 13, 14, 18, 19, 20, 24, 26. Cât cântăresc împreună cele cinci colete?

a) 41 kg b) 62 kg c) 37 kg d) 42 kg

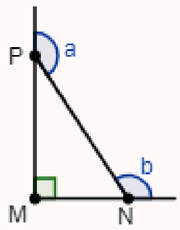
Demonstrație. Notăm cu a, b, c, d și e valorile maselor celor cinci colete. Fiecare colet este cântărit de 4 ori împreună cu fiecare dintre celelalte colete. Adunăm toate relațiile și obținem $4 \cdot (a + b + c + d + e) = 7 + 11 + 12 + 13 + 14 + 18 + 19 + 20 + 24 + 26 = 164 \iff a + b + c + d + e = \boxed{41 \text{ kg}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ 5p

□

Problema 11

Care este suma măsurilor unghiurilor a și b din figura următoare. Știm că $m(\angle PMN) = 90°$.



a) $540°$ b) $360°$ c) $270°$ d) $180°$

Demonstrație. $a = 180° - m(\angle MPN)$, $b = 180° - m(\angle MNP) \implies a + b = 360° - m(\angle MPN) - m(\angle MNP) = 360° - 90° = \boxed{270°}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

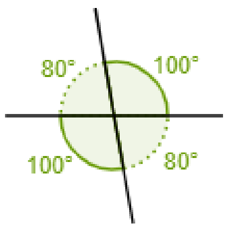
□

Problema 12

Două drepte concurente determină 4 unghiuri proprii la intersecția lor. Care este cea mai mare măsură a unuia dintre cele patru unghiuri care se formează, dacă suma a trei dintre ele este $280°$?

a) $100°$ b) $120°$ c) $80°$ d) $140°$

Demonstrație. Cele patru unghiuri sunt unghiuri în jurul unui punct, iar suma lor este de $360°$. Măsura celui de-al patrulea unghi este $360° - 280° = 80°$. Unghiul adiacent acestuia are măsura de $180° - 80° = 100°$, prin urmare cea mai mare măsură a unghiurilor care se formează este de $\boxed{100°}$.

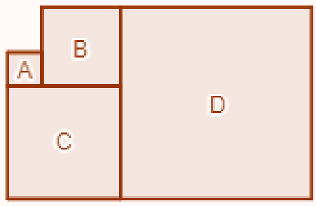


Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

□

Problema 13

În figura de mai jos sunt lipite patru pătrate pe care le-am notat cu A, B, C și D. Perimetrul pătratului A este de 16 cm, iar al pătratului B este de 24 cm. Care este perimetrul pătratului D?



a) 256 cm b) 64 cm c) 48 cm d) 82 cm

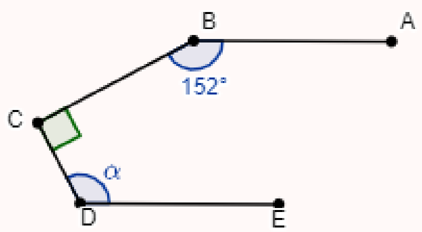
Demonstrație. Latura pătratului A este $16 : 4 = 4$ cm, latura pătratului B este $24 : 4 = 6$ cm, prin urmare latura pătratului C este 10 cm și latura pătratului D este suma laturilor pătratelor B și C, adică 16 cm. Perimetrul pătratului D este egal cu $4 \cdot 16 = \boxed{64 \text{ cm}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ 5*p*

□

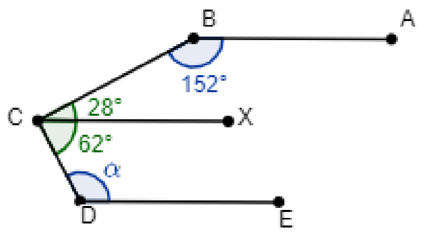
Problema 14

În figura următoare știm că $AB \parallel DE$, $BC \perp CD$, $m(\angle ABC) = 152°$ și $m(\angle CDE) = \alpha°$. Care este valoarea lui α?



a) 28° b) 138° c) 128° d) 118°

Demonstrație. Construim $CX \parallel AB$, A și X fiind situate în același semiplan față de BC.



$\angle ABC$ și $\angle BCX$ sunt interne de aceeași parte a secantei, deci sunt suplementare și $m(\angle BCX) = 180° - m(\angle ABC) = 180° - 152° = 28°$. Știm că $m(\angle BCD) = 90°$, de unde obținem $m(\angle XCD) = 90° - m(\angle BCX) = 90° - 28° = 62°$. În plus, $\angle XCD$ și $\angle CDE$ sunt suplementare pentru că sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei, de unde $m(\angle CDE) = 180° - m(\angle XCD) = 180° - 62° = 118°$. Valoarea lui α este $\boxed{118°}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ 5*p*

□

Problema 15

Unghiurile $\angle AOB$ și $\angle AOC$ sunt neadiacente suplementare, iar $(OB \subset \text{Int}(\angle AOC)$. Se consideră punctele E, O, F coliniare în această ordine, iar $(OE$ și $(OF$ nu sunt incluse în $\text{Int}(\angle AOC)$, iar $(OC \subset \text{Int}(\angle BOF)$. Dacă măsura $\angle BOC$ este egală cu media aritmetică a măsurilor unghiurilor $\angle EOA$ și $\angle COF$, calculați diferența măsurilor unghiurilor $\angle AOB$ și $\angle BOC$.

a) $20°$ b) $32°$ c) $72°$ d) $36°$

Demonstrație. Notăm cu $2x = m(\angle COF)$ și cu $2y = m(\angle AOE)$. Atunci

$$m(\angle BOC) = \frac{m(\angle COF) + m(\angle AOE)}{2} = x + y$$

Cum E, O și F sunt coliniare, avem:

$$m(\angle EOF) = 180° = m(\angle COF) + m(\angle COB) + m(\angle AOB) + m(\angle AOE)$$

De unde,

$$m(\angle AOB) + 3x + 3y = 180° \implies 2 \cdot m(\angle AOB) + 6x + 6y = 360° \ (1)$$

Dar unghiurile $\angle AOB$ și $\angle AOC$ sunt neadiacente suplementare, deci:

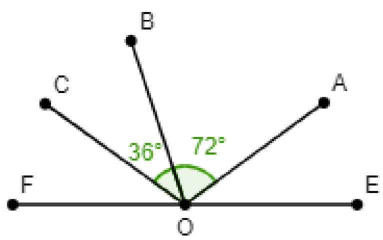
$$m(\angle AOB) + m(\angle AOC) = m(\angle AOB) + m(\angle AOB) + m(\angle BOC) =$$

$$= 2 \cdot m(\angle AOB) + x + y = 180° \ (2)$$

Scădem cele 2 relații și obținem:

$$5x + 5y = 180° \implies x + y = 36°$$

Așadar $m(\angle BOC) = 36°$ și din relația (2) obținem $m(\angle AOB) = \dfrac{180° - 36°}{2} = 72°$. Diferența măsurilor celor două unghiuri este de $\boxed{36°}$.



Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ 5p

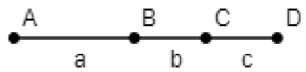
□

Problema 16

A, B, C, D sunt patru puncte coliniare în această ordine pe dreapta d, astfel încât $2 \cdot AC = AB + AD$ și $BD = 2^{48}$ cm. Lungimea segmentului (BC) este egală cu:

a) 2^{48} cm b) 2^{47} cm c) 2^{46} cm d) 2^{45} cm

Demonstrație. Pentru a face calculele mai rapid, notăm lungimile segmentelor disjuncte cu $AB = a$, $BC = b$ si $CD = c$. Relația din enunț se scrie $2 \cdot AC = AB + AD \iff 2 \cdot (AB + BC) = AB + AB + BC + CD \iff 2 \cdot (a + b) = a + a + b + c \iff b = c \iff (BC) \equiv (CD)$.
Dar $BD = BC + CD \implies BC = 2^{48} : 2 \implies BC = \boxed{2^{47} \text{ cm}}$.



Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 2 ore