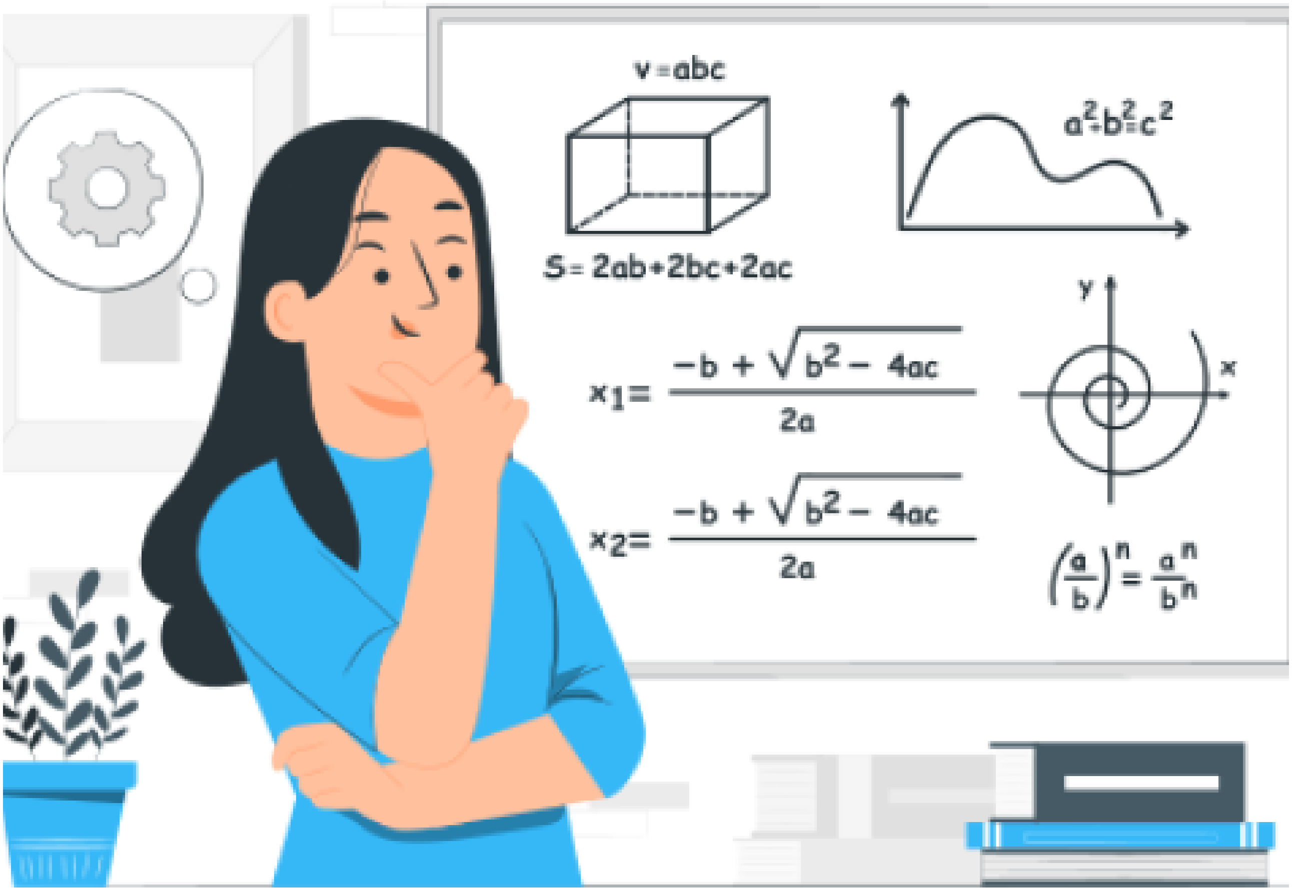


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022

Etapa I
Clasa a VII-a

- Soluții -

Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Scris ca fracție ordinară ireductibilă, numărul $2,0(22)$ este egal cu:

a) $\frac{182}{90}$ b) $\frac{182}{9}$ c) $\frac{1}{45}$ d) $\frac{91}{45}$

Demonstrație. $2,0(22) = 2 + \frac{22-0}{990} = \frac{2 \cdot 990 + 22}{990} = \frac{22 \cdot (90+1)}{990} = \boxed{\frac{91}{45}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 2

Fie $a_n = \frac{1}{n(n+2020)}$, unde n este număr natural nenul. Rezultatul calculului

$$2021 \cdot a_1 + 2022 \cdot a_2$$

este egal cu:

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{3}{2}$

Demonstrație. $2021 \cdot a_1 + 2022 \cdot a_2 = 2021 \cdot \frac{1}{1 \cdot 2021} + 2022 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2022} = 1 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 3

Dacă $x \cdot 2^{2019} = (2^{2022} - 1) : \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{2021}}\right)$, atunci x este egal cu:

a) 4 b) 2 c) 1 d) 2^{2021}

Demonstrație. $x \cdot 2^{2019} = (2^{2022} - 1) : \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{2021}}\right) \iff$

$\iff x \cdot 2^{2019} = (2^{2022} - 1) : \frac{2^{2021} + 2^{2020} + ... + 1}{2^{2021}} \iff$

$\iff x \cdot 2^{2019} = (2^{2022} - 1) \cdot \frac{2^{2021}}{2^{2022} - 1} \iff x \cdot 2^{2019} = 2^{2021} \iff x = \boxed{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

□

Problema 4

Dacă numerele reale x și y sunt soluții ale ecuației $(x-y-1)^2 + (x+y-7)^2 = 0$, atunci valoarea sumei $x+y$ este egală cu:

a) 4 b) 3 c) 7 d) 1

Demonstrație. $(x-y-1)^2 \geq 0$, $(x+y-7)^2 \geq 0 \implies (x-y-1)^2+(x+y-7)^2 \geq 0$, adică fiecare pătrat trebuie să fie egal cu 0. Prin urmare, $x+y=\boxed{7}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ 5p

□

Problema 5

Avem 5 suspecți într-o tâlhărie: A, B, C, D, și E. Știm că doi sunt vinovați, restul sunt nevinovați. Cei nevinovați spun adevărul, vinovații mint. Ei afirmă următoarele:

- A: "*C este nevinovat*".
- B: "*D este nevinovat*".
- C: "*E este nevinovat*".
- D: "*B este nevinovat*".
- E: "*A este nevinovat*".

Care sunt adevărații vinovați?

a) A și B; b) D și E; c) B și D; d) E și C.

Demonstrație. Dacă A ar fi vinovat, înseamnă că ar minți și atunci C ar fi vinovat la rândul lui, și atunci afirmația făcută de el nu este adevărată și E devine și el vinovat. Dar numărul vinovaților ar fi 3, contradicție cu ipoteza. Vinovații sunt $\boxed{B \text{ și } D}$, iar afirmațiile făcute de aceștia sunt verificate.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ 5p

□

Problema 6

Numărul perechilor de numere întregi (x, y), care sunt soluții ale ecuației $x^3-y^2=y^3+x^2-1001$ este egal cu:

a) 0 b) 1 c) 3 d) 6

Demonstrație. Rescriem ecuația $x^3-y^2=y^3+x^2-1001 \iff x^3-x^2=y^3+y^2-1001$. Observăm că x^3-x^2 este număr par pentru că numerele întregi nu își modifică paritatea prin ridicarea la putere cu exponent nenul. La fel și y^3+y^2 este număr par din aceleași considerente. Dar 1001 este număr impar, prin urmare ecuația nu are soluții. Numărul de soluții este $\boxed{0}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ 5p

□

Problema 7

Fie a, b, $c \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $\frac{bc}{a} = \frac{1}{3}$, $\frac{ac}{b} = \frac{1}{5}$ și $\frac{ab}{c} = 1$. Valoarea numărului $N = \sqrt{7a^2 + 8b^2 - c^2}$ este egală cu:

a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Demonstrație. $\frac{bc}{a} = \frac{1}{3} \iff 3bc = a$; $\frac{ac}{b} = \frac{1}{5} \iff 5ac = b$; $\frac{ab}{c} = 1 \iff ab = c$. Prin înmulțirea celor trei relații obținem $abc = \frac{1}{15}$. Din $a = 3bc \implies a^2 = 3abc = \frac{1}{5}$. Din $b = 5ac \implies b^2 = 5abc = \frac{1}{3}$. Din $c = ab \implies c^2 = \frac{1}{15}$. Astfel, $N = \sqrt{\frac{7}{5} + \frac{8}{3} - \frac{1}{15}} = \boxed{2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 8

Soluția ecuației $|x-1| + |x-2| + ... + |x-9| = 10(x-11)$ este egală cu:

a) 40 b) 65 c) 60 d) 17

Demonstrație. Știm că $|a| \geq 0$, oricare ar fi a număr real. Atunci $|x-1|+|x-2|+...+|x-9| \geq 0 \implies x \geq 11$. Atunci $|x-1| = x-1$, $|x-2| = x-2, ..., |x-9| = x-9$ și ecuația devine $9x - 45 = 10x - 110$, cu soluția $x = \boxed{65}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 9

Se aleg la întâmplare trei numere diferite din șirul $1, 2, 3, \ldots, 2018$. Dacă probabilitatea ca produsul lor să fie impar este p, alegeți din variantele de mai jos pe cea adevărată:

a) $p < \frac{1}{8}$ b) $p = \frac{1}{8}$ c) $p \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ d) $p = \frac{1}{2}$

Demonstrație.

- Metoda 1: Șirul are un număr egal de numere pare și impare. Probabilitatea ca un număr luat la întâmplare să fie impar este $\frac{1}{2}$. Probabilitatea ca 3 numere, nu neapărat diferite, să fie impare este $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Probabilitatea ca trei numere diferite să fie impare este $\boxed{p < \frac{1}{8}}$.

- Metoda 2: Numărul de cazuri posibile este C_{2018}^3, iar numărul de cazuri favorabile C_{1009}^3, avem deci:

$$p = \frac{C_{1009}^3}{C_{2018}^3} = \frac{1009!}{3! \cdot 1006!} \cdot \frac{3! \cdot 2015!}{2018!} = \frac{1007 \cdot 1008 \cdot 1009}{2016 \cdot 2017 \cdot 2018} = \frac{1007}{4 \cdot 2017} \approx 0.124 < \frac{1}{8}$$

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ 5*p*

□

Problema 10

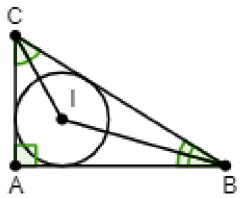
Într-un triunghi dreptunghic cu $m(\angle BAC) = 90°$ se înscrie un cerc de centru I. Măsura unghiului $\angle BIC$ este egală cu:

a) $125°$ b) $120°$ c) $135°$ d) $110°$

Demonstrație. Centrul cercului înscris într-un triunghi este punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor triunghiului. În triunghiul $\triangle BIC$ avem:

$$m(\angle BIC) = 180° - m(\angle IBC) - m(\angle ICB) = 180° - \frac{m(\angle ABC) + m(\angle ACB)}{2} =$$

$$= 180° - \frac{180° - m(\angle BAC)}{2} = 180° - \frac{90°}{2} = 180° - 45° = \boxed{135°}.$$

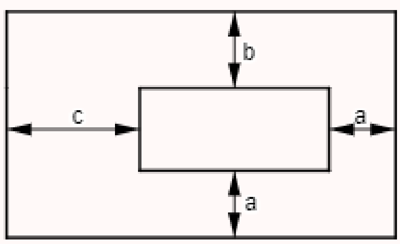


Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ 5*p*

□

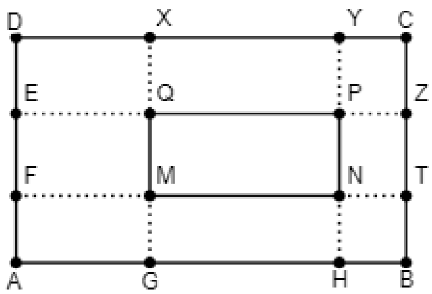
Problema 11

Cele două dreptunghiuri din desenul de mai jos au laturile respectiv paralele și $a = 2$ m, $b = 3$ m, $c = 6$ m. Care este diferența perimetrelor celor două dreptunghiuri?



a) 16 m b) 20 m c) 21 m d) 26 m

Demonstrație. Prelungim laturile dreptunghiului din interior până când se intersectează cu laturile dreptunghiului din exterior și notăm vârfurile celor două dreptunghiuri și punctele de intersecție conform desenului de mai jos.



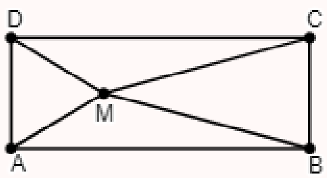
Prin trasarea acestor drepte se obțin alte dreptunghiuri, $XYPQ$, $PZTN$, $MNHG$ și $EFMQ$. Au loc egalitățile $PQ = XY$, $PN = ZT$, $MN = GH$ și $MQ = EF$. Diferența perimetrelor celor două dreptunghiuri este $2\cdot(DX+CY+CZ+BT) = 2\cdot(EQ+PZ+PY+NH) = 2\cdot(6+2+3+2) = 2 \cdot 13 = \boxed{26 \text{ m}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ 5p

□

Problema 12

Un dreptunghi este împărțit în patru triunghiuri, așa cum arată figura următoare, ariile celor patru triunghiuri fiind $\mathcal{A}_{MAB} = 15 \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_{MCD} = 10 \text{ cm}^2$, $\mathcal{A}_{MBC} = 5 \text{ cm}^2$ și $\mathcal{A}_{MAD} = x \text{ cm}^2$. Valoarea lui x este egală cu:



a) 5 cm^2 b) 15 cm^2 c) 25 cm^2 d) 20 cm^2

Demonstrație. Dacă M este un punct în interiorul unui paralelogram $ABCD$ atunci

$$\mathcal{A}_{MAB} + \mathcal{A}_{MCD} = \mathcal{A}_{MAD} + \mathcal{A}_{MBC}.$$

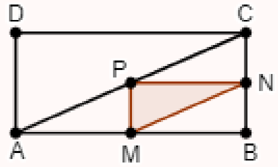
Pentru a demonstra asta să construim perpendiculara comună a dreptelor AB și CD. Atunci
$\mathcal{A}_{MAB} + \mathcal{A}_{MCD} = \dfrac{AB \cdot d(M, AB)}{2} + \dfrac{CD \cdot d(M, CD)}{2} = \dfrac{AB \cdot d(AB, CD)}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \mathcal{A}_{ABCD}$.
$\mathcal{A}_{MAB} + \mathcal{A}_{MCD} = \mathcal{A}_{MAD} + \mathcal{A}_{MBC} \iff 15 + 10 = x + 5 \iff x = \boxed{20 \text{ cm}^2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ 5p

□

Problema 13

În dreptunghiul $ABCD$, M și N sunt mijloacele laturilor (AB), respectiv (BC), iar P este mijlocul laturii (AC). Dacă aria triunghiului $\triangle MNP$ este de 2 cm^2, atunci aria dreptunghiului este:



a) 10 cm^2 b) 8 cm^2 c) 16 cm^2 d) 20 cm^2

Demonstrație. Cele patru triunghiuri determinate de mijloacele M, N, respectiv P sunt congruente, prin urmare au aceeași arie. $\mathcal{A}_{ABC} = 4 \cdot \mathcal{A}_{MNP} = 8\text{cm}^2$. Cele două triunghiuri determinate de diagonala (AC) sunt și ele congruente, adică au ariile egale și $\mathcal{A}_{ABCD} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABC} = \boxed{16 \text{ cm}^2}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

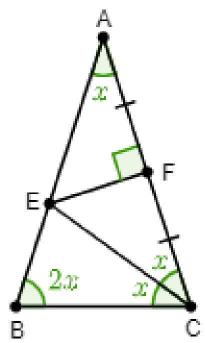
□

Problema 14

În triunghiul isoscel $\triangle ABC$ cu $(AB) \equiv (AC)$ se consideră bisectoarea $(CE$, $E \in (AB)$ și punctul F este mijlocul segmentului (AC) și $EF \perp AC$. Măsura unghiului $\angle BAC$ este egală cu:

a) 30° b) 36° c) 45° d) 90°

Demonstrație. În triunghiul $\triangle AEC$ mediana (EF) este și înălțime, deci $\triangle AEC$ este isoscel cu $(AE) \equiv (CE) \implies \angle EAC \equiv \angle ECA$.
Cum $(CE$ este bisectoarea $\angle ACB \implies \angle ACE \equiv \angle BCE$. Vom nota $m(\angle ACE) = x$. Pentru că $(AB) \equiv (AC) \implies \angle ABC \equiv \angle ACB$.
Suma măsurilor unghiurilor triunghiului $\triangle ABC$ este de 180°, de unde $5x = 180° \iff x = 36°$.
De aici $m(\angle BAC) = \boxed{36°}$.



Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

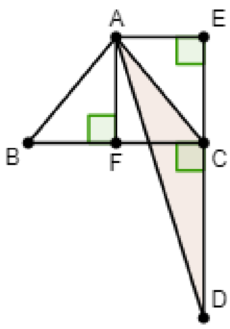
□

Problema 15

Fie $\triangle ABC$ cu $AB = AC$ și $CD \perp BC$, punctele A și D fiind situate în semiplane opuse față de dreapta BC. Mai știm că $CD = BC = 3$ cm. Care este aria triunghiului $\triangle ACD$?

a) $\frac{5}{4}$ cm^2 b) $\frac{3}{2}$ cm^2 c) $\frac{1}{2}$ cm^2 d) $\frac{9}{4}$ cm^2

Demonstrație. Construim $AE \perp CD$, $E \in CD$ și $AF \perp BC$, $F \in BC$. Patrulaterul $AFCE$ este un dreptunghi și $d(A, CD) = \frac{BC}{2}$. Prin urmare $\mathcal{A}_{ACD} = \frac{AE \cdot CD}{2} = \frac{\frac{BC}{2} \cdot CD}{2} = \boxed{\frac{9}{4} \text{ cm}^2}$.



Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

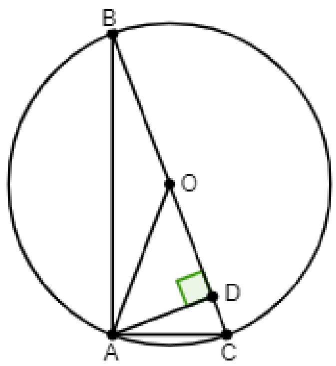
□

Problema 16

Raportul dintre aria cercului circumscris triunghiului dreptunghic $\triangle ABC$ cu $m(\angle BAC) = 90°$ și aria triunghiului este 2π. Care este diferența măsurilor unghiurilor ascuțite ale triunghiului?

a) $75°$ b) $50°$ c) $60°$ d) $30°$

Demonstrație. Fie $AD \perp BC$ și O centrul cercului circumscris. Pentru că triunghiul este dreptunghic, centrul cercului este mijlocul ipotenuzei. Fie acesta O. Știm că $\frac{\mathcal{A}_{disc}}{\mathcal{A}_{\triangle ABC}} = 2\pi$. De aici obținem $\frac{\pi \cdot OC^2}{\frac{AD \cdot BC}{2}} = 2\pi \iff \frac{\pi \cdot OC^2}{AD \cdot OC} = 2\pi \iff OC = 2 \cdot AD$. Dar $OA = OC$ pentru că sunt raze, deci și $OA = 2 \cdot AD$. În triunghiul dreptunghic $\triangle ADO$ cateta (AD) este jumătate din ipotenuză și din teorema unghiului de $30°$ obținem că $m(\angle DOA) = 30°$. Dar unghiul $\angle AOC$ este unghi exterior triunghiului isoscel $\triangle AOB$ cu $OA = OB \implies 2 \cdot m(\angle ABO) = m(\angle AOC) \iff m(\angle ABC) = 15°$ și $m(\angle ACB) = 75°$. Diferența lor este $\boxed{60°}$.



Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 2 ore