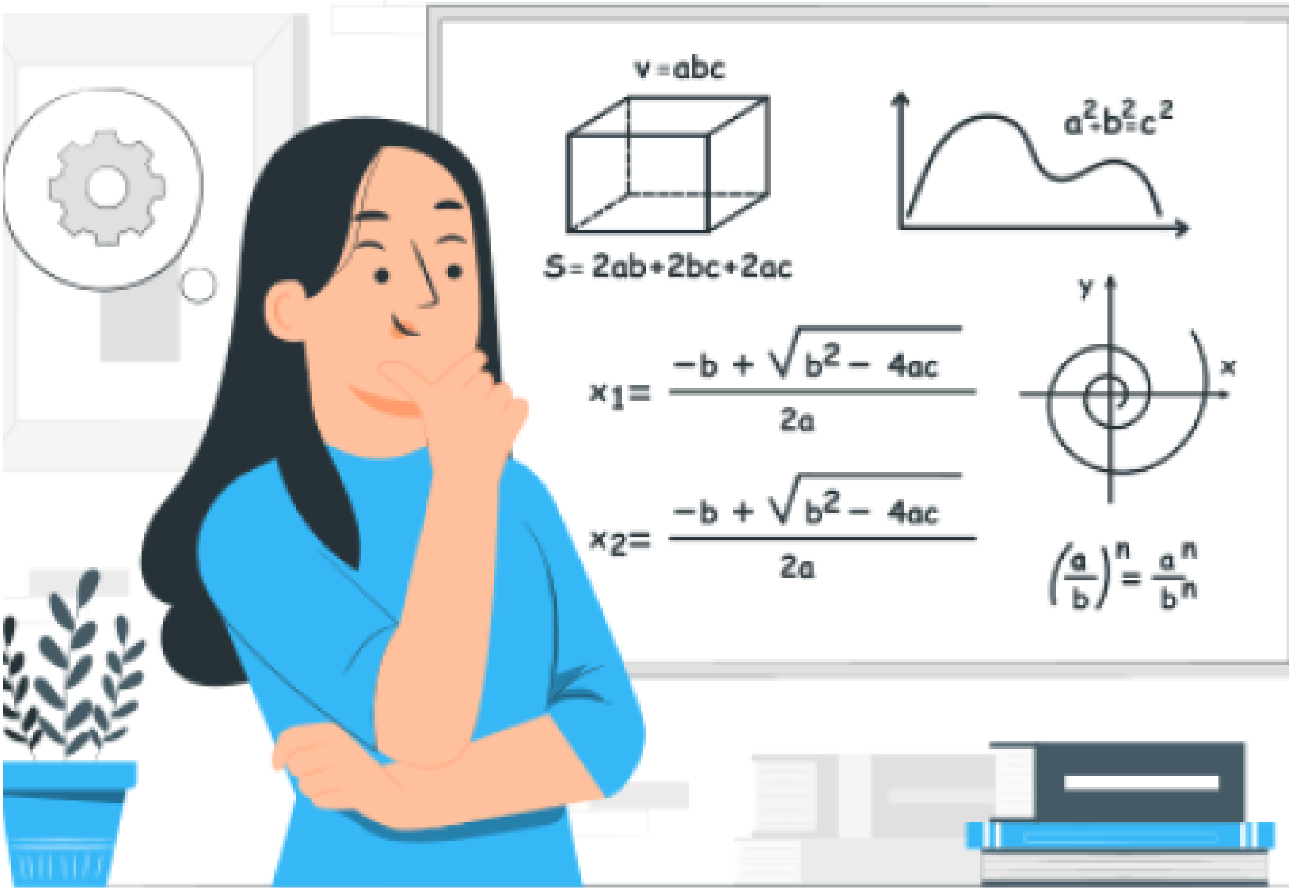


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022

Etapa I
Clasa a VIII-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Dacă $\dfrac{a-b}{c-d} = -16$, $c \neq d$, atunci $\dfrac{a-b}{d-c}$ este egal cu:

a) $-\dfrac{1}{16}$ b) 16 c) $\dfrac{1}{16}$ d) -16

Demonstrație. $\dfrac{a-b}{d-c} = \dfrac{a-b}{-(c-d)} = -\dfrac{a-b}{c-d} = -(-16) = \boxed{16}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 2

Vârstele celor 4 verișoare din familia Ionescu sunt 3, 8, 12, 14, nu neapărat în această ordine. Suma vârstelor Ioanei și Adinei este un număr divizibil cu 5, suma vârstelor Ioanei și Dianei este și el un număr divizibil cu 5. Care este vârsta celei de-a patra verișoară, Maria?

a) 3 b) 8 c) 12 d) 14

Demonstrație. Singurele perechi dintre cele patru numere cu suma divizibilă cu 5 sunt $(3, 12)$ și $(8, 12)$. Numărul comun este vârsta Ioanei, adică 12, Adina și Diana au vârstele 3 și 8, nu neapărat în această ordine, iar Maria are $\boxed{14}$ ani.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 3

Numărul numerelor naturale n pentru care $-16 < \sqrt{n} - \sqrt{81} < 2$ este egal cu:

a) 122 b) 120 c) 121 d) 11

Demonstrație. $-16 < \sqrt{n} - \sqrt{81} < 2 \iff -16 < \sqrt{n} - 9 < 2 \iff -16 + 9 < \sqrt{n} < 2 + 9 \iff -7 < \sqrt{n} < 11$.

Prima parte a inegalității este adevărată pentru orice număr natural pentru că $\sqrt{n} \geq 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, iar $\sqrt{n} < 11 \iff n < 121 \implies n \in \{0, 1, 2, 3, ..., 120\}$, mulțimea soluțiilor fiind de cardinal $\boxed{121}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 4

Care este suma numerelor reale a și b care sunt soluții ale ecuației

$$|a+3| + b^2 - 14b + 49 = 0 \ ?$$

a) 10 b) 4 c) -11 d) 0

Demonstrație. Ecuația dată este echivalentă cu

$$|a+3|+(b-7)^2=0.$$

Cum $|a+3| \geq 0$ și $(b-7)^2 \geq 0$ obținem că are loc cazul de egalitate. De aici, $a=-3$ și $b=7$. Suma lor este egală cu $\boxed{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

□

Problema 5

Numerele reale a și b verifică inegalitatea $a^2+b^2-10a\sqrt{6}-12b\sqrt{5}+330 \leq 0$. Valoarea numărului $x=\left(\frac{6}{b}+\frac{5}{a}\right)\cdot(b-a)$ este egală cu:

a) $\sqrt{30}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$ d) 1

Demonstrație. Inegalitatea dată se rescrie $a^2-2a\cdot5\sqrt{6}+(5\sqrt{6})^2+b^2-2b\cdot6\sqrt{5}+(6\sqrt{5})^2 \leq 0 \iff \left(a-5\sqrt{6}\right)^2+\left(b-6\sqrt{5}\right)^2 \leq 0 \iff a=5\sqrt{6}$ si $b=6\sqrt{5}$. Valoarea lui x este egală cu $\boxed{1}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 6

Numerele reale a, b, c verifică relațiile $[a,b]\cap\mathbb{Z}=\{a,b,c\}$ și $a^2+b^2-5b=9$. Valoarea produsului abc este egală cu:

a) 60 b) 2022 c) 6 d) 24

Demonstrație. Din $[a,b]\cap\mathbb{Z}=\{a,b,c\} \implies a$, c și b sunt numere întregi consecutive ordonate crescător. Deci $b=a+2$ și înlocuim în a doua relație obținând astfel $a^2+(a+2)^2-5(a+2)=9 \iff 2a^2-a=15$. Putem evita folosirea formulelor de rezolvare pentru ecuația de gradul al $II-$lea formând în membrul stâng un pătrat. Înmulțim ecuația cu 8 și obținem $16a^2-8a=120$, adăugăm câte un 1 în fiecare membru al egalității și avem $(4a-1)^2=121$, care are o unică soluție întreagă $a=3$, de unde $c=4$ și $b=5$. Produsul abc are valoarea $\boxed{60}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

□

Problema 7

Pentru $a=10^x$, $b=7^x$ și $x\in\mathbb{Z}$ care este soluție a inecuației $\left|\frac{6x+5}{4}\right|<1$, determinați $[a-b]$, unde $[t]$ reprezintă partea întreagă a numărului real t.

a) 3 b) 1 c) 0 d) -1

Demonstrație. $\left|\frac{6x+5}{4}\right|<1 \iff -1<\frac{6x+5}{4}<1 \iff -4<6x+5<4 \iff -9<6x<-1 \iff -\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{6}$. Cum $x\in\mathbb{Z} \implies x=-1$.
$a-b=\frac{1}{10}-\frac{1}{7}=-\frac{3}{70}$. Pentru că $-1<-\frac{3}{70}<0 \implies [a-b]=\boxed{-1}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 8

Dacă $(x-2)(x+2)=12$, atunci valoarea expresiei $(x^2+x)(x^2-x)$ este egală cu:

a) 256 b) 16 c) 0 d) 240

Demonstrație. $(x+2)(x-2)=12 \iff x^2-4=12 \iff x^2=16$. Pe de altă parte $(x^2+x)(x^2-x)=x^4-x^2=(16)^2-16=256-16=\boxed{240}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problema 9

Fie $A=\sqrt{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)+1}$, unde $n\in\mathbb{N}$. Dintre următoarele afirmații care este cea adevărată?

a) $A\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$

b) $A\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$

c) A este număr natural impar, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$

d) A este număr natural par, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$

Demonstrație. Pentru a face calculele mai ușoare vom nota cu $a=n+3$.

$$A=\sqrt{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)+1}=\sqrt{a(a+1)(a+2)(a+3)+1}=$$
$$=\sqrt{(a^2+3a)(a^2+3a+2)+1}=\sqrt{(a^2+3a)^2+2(a^2+3a)+1}=$$
$$=\sqrt{(a^2+3a+1)^2}=\left|a^2+3a+1\right|=a^2+3a+1\in\mathbb{N}.$$

Mai mult, a^2+3a este număr par pentru că este suma a două numere de aceeași paritate, deci $\boxed{\text{A este număr natural impar, oricare ar fi n} \in \mathbb{N}}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ .... $5p$

□

Problema 10

Fie $a,b\in\mathbb{R}^*$, astfel încât $a^2-b^2=3ab$. Valoarea numărului $A=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{6b}{a}-\frac{6a}{b}+23}$ este egală cu:

a) $\sqrt{2}$ b) 4 c) 2 d) $\frac{1}{4}$

Demonstrație. Împărțim relația inițială prin ab (avem voie, numerele sunt nenule) și obținem $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=3$.

$A^2=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{6b}{a}-\frac{6a}{b}+23=\frac{a^2}{b^2}-2+\frac{b^2}{a^2}+6\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)+2+23=\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2+6\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)+25=$ $3^2+6\cdot(-3)+25=16$. Deci $A=\boxed{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{b)}}$ .... $5p$

$\square$

Problema 11

Fie $x,\ y \in \mathbb{N}^*$, $x \geq 4$ astfel încât $9^{x-2} + 9^{y+2} \leq 2 \cdot 3^{x+y}$. Numărul $3^x + 3^y$ este divizibil cu:

a) 41 b) 5 c) 4 d) 23

Demonstrație. $9^{x-2} + 9^{y+2} \leq 2 \cdot 3^{x+y} \iff 3^{2(x-2)} - 2 \cdot 3^{x-2} \cdot 3^{y+2} + 3^{2(y+2)} \leq 0 \iff (3^{x-2} - 3^{y+2})^2 \leq 0 \implies 3^{x-2} = 3^{y+2} \iff x - 2 = y + 2 \iff x - y = 4.$
$3^x + 3^y = 3^y \cdot (3^{x-y} + 1) = 3^y \cdot (3^4 + 1) = 3^y \cdot 82$. Singurul dintre numerele din listă care este divizor al numărului $3^x + 3^y$ este $\boxed{41}$.

Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

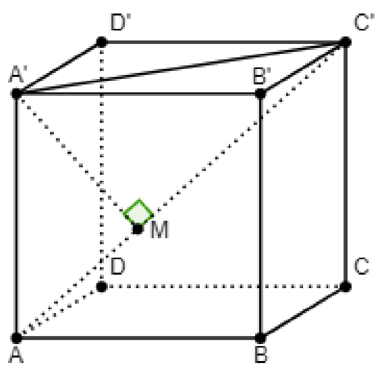
$\square$

Problema 12

În cubul $ABCDA'B'C'D'$ notăm cu M proiecția punctului A' pe dreapta AC'. Valoarea raportului $\dfrac{AM}{MC'}$ este egală cu:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) 2 d) $\dfrac{1}{2}$

Demonstrație. $AA' \perp (A'B'C')$, $A'C' \subset (A'B'C') \implies AA' \perp A'C'$. În triunghiul dreptunghic $\triangle AA'C'$ aplicăm teorema catetei pentru fiecare dintre catetele (AA'), respectiv $(C'A')$ și obținem $AA'^2 = AM \cdot AC'$, respectiv $A'C'^2 = MC' \cdot AC'$. Obținem în continuare $\dfrac{AA'^2}{A'C'^2} = \dfrac{AM \cdot AC'}{MC' \cdot AC'} \implies \dfrac{AM}{MC'} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.



Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

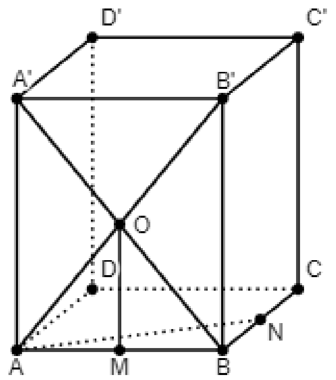
$\square$

Problema 13

În prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ de bază $ABCD$ notăm cu M, respectiv N mijloacele laturilor (AB), respectiv (BC). Fie $AB' \cap A'B = \{O\}$. Măsura unghiului determinat de dreptele OM și AN este egală cu:

a) $90°$ b) $60°$ c) $30°$ d) $0°$

Demonstrație. Punctul O este mijlocul fiecărei diagonale, deci $AO = OB'$. Dar și $AM = MB \implies OM$ este linie mijlocie în $\triangle ABB' \implies OM \parallel BB'$. Dar $BB' \perp (ABC) \implies OM \perp (ABC)$. Cum $AN \subset (ABC) \implies OM \perp AN \implies m(\angle(OM, AN)) = \boxed{90°}$.



Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

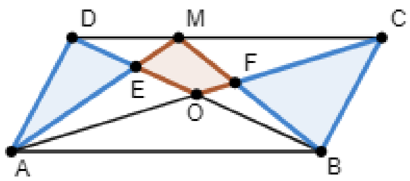
□

Problema 14

Fie $ABCD$ un paralelogram de arie 1. Notăm cu O intersecția diagonalelor (AC) și (BD). Fie $M \in (CD)$, $AM \cap BD = \{E\}$, iar $MB \cap AC = \{F\}$. Suma ariilor triunghiurilor $\triangle ADE$ și $\triangle BFC$ este egală cu $\frac{1}{3}$. Care este aria patrulaterului $MEOF$?

a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{16}$

Demonstrație. Să observăm mai întâi că $\mathcal{A}_{AMB} = \frac{1}{2}$ pentru că este jumătate din aria paralelogramului. Apoi $\mathcal{A}_{AOD} + \mathcal{A}_{BOC} = \frac{1}{2}$ pentru că fiecare are suprafața egală cu o pătrime din aria lui $ABCD$. $\mathcal{A}_{AEO} + \mathcal{A}_{BOF} = \mathcal{A}_{ADO} + \mathcal{A}_{BOC} - \mathcal{A}_{ADE} - \mathcal{A}_{BCF} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. În final avem că $\mathcal{A}_{MEOF} = \mathcal{A}_{AMB} - \mathcal{A}_{AEO} - \mathcal{A}_{BOF} - \mathcal{A}_{AOB} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{12}}$.



Răspuns corect: $\boxed{\text{a)}}$ .... $5p$

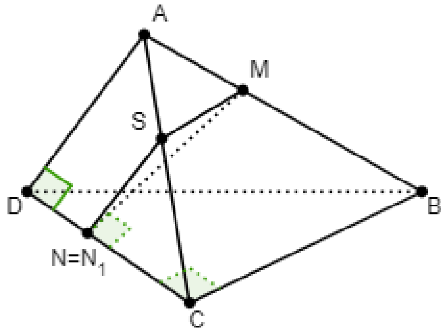
□

Problema 15

În tetraedrul $ABCD$ știm că $AD \perp CD$ și $CD \perp BC$. Fie $M \in (AB)$ astfel încât $\frac{BM}{MA} = 2$, iar N este proiecția punctului M pe dreapta CD.
Valoarea raportului $\frac{CN}{ND}$ este egală cu:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) 2 d) $\frac{2}{3}$

Demonstrație. Vom folosi metoda numită redefinirea punctului pentru a-l construi pe N. Pentru asta vom construi planul care trece prin M și este perpendicular pe dreapta CD.
Fie $MS \parallel BC$, $S \in AC$. Dar $BC \perp CD \implies MS \perp CD$ (1). Fie $SN_1 \parallel AD$, $N_1 \in CD$. Cum $AD \perp CD \implies SN_1 \perp CD$ (2). Din (1) și (2) $\implies DC \perp (MSN_1)$, dar și $MN_1 \subset (MSN_1) \implies MN_1 \perp CD$. Cum proiecția unui punct pe o dreaptă este unică rezultă că $N_1 = N$.
Aplicând teorema lui Thales obținem $\frac{CN}{ND} = \frac{CS}{SA} = \frac{BM}{MA} = \boxed{2}$.



Răspuns corect: $\boxed{\text{c)}}$ 5p

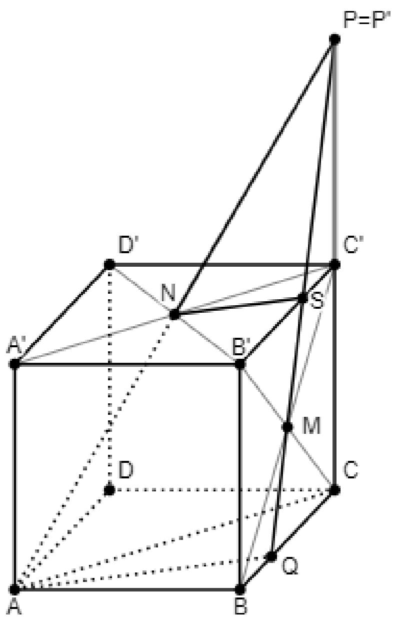
□

Problema 16

În cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 4$ cm, considerăm M și N centrele fețelor $BCC'B'$, respectiv $A'B'C'D'$. Planul (AMN) intersectează dreapta CC' în punctul P, muchia (BC) în punctul Q, iar muchia $B'C'$ în punctul S. Raportul ariilor triunghiurilor $\triangle PNS$ și $\triangle PAQ$ este egal cu:

a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{4}$

Demonstrație. $AA' \parallel CC' \implies A, A', C, C'$ sunt puncte coplanare. $N \in A'C' \implies AN \subset (ACC')$. Dreptele AN și CC' sunt concurente în punctul P'. Dar $AN \subset (AMN) \implies P = P'$. $P \in CC'$, $CC' \subset (BCC') \implies P \in (BCC')$. Dar și $M \in (BCC') \implies PM \subset (BCC')$. Cum $PM \subset (AMN) \implies (AMN) \cap (BCC') = PM$ și atunci punctele S și Q sunt, de fapt, punctele de intersecție ale dreptei PM cu $B'C'$, respectiv BC.
Vom lucra în planul (ACC'). Știm că $NC' \parallel AC$, $NC' = \frac{AC}{2} \implies (NC')$ este linie mijlocie în $\triangle PAC \implies PN = \frac{PA}{2}$.
$(ABC) \parallel (A'B'C')$, $(AMN) \cap (ABC) = AQ$, $(AMN) \cap (A'B'C') = NS$, din teorema fierăstrăului obținem $NS \parallel AQ \implies \triangle PNS \sim \triangle PAQ \implies \frac{\mathcal{A}_{PNS}}{\mathcal{A}_{PAQ}} = \left(\frac{PN}{PA}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{4}}$.



Răspuns corect: $\boxed{\text{d)}}$ .... $5p$

□

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 2 ore