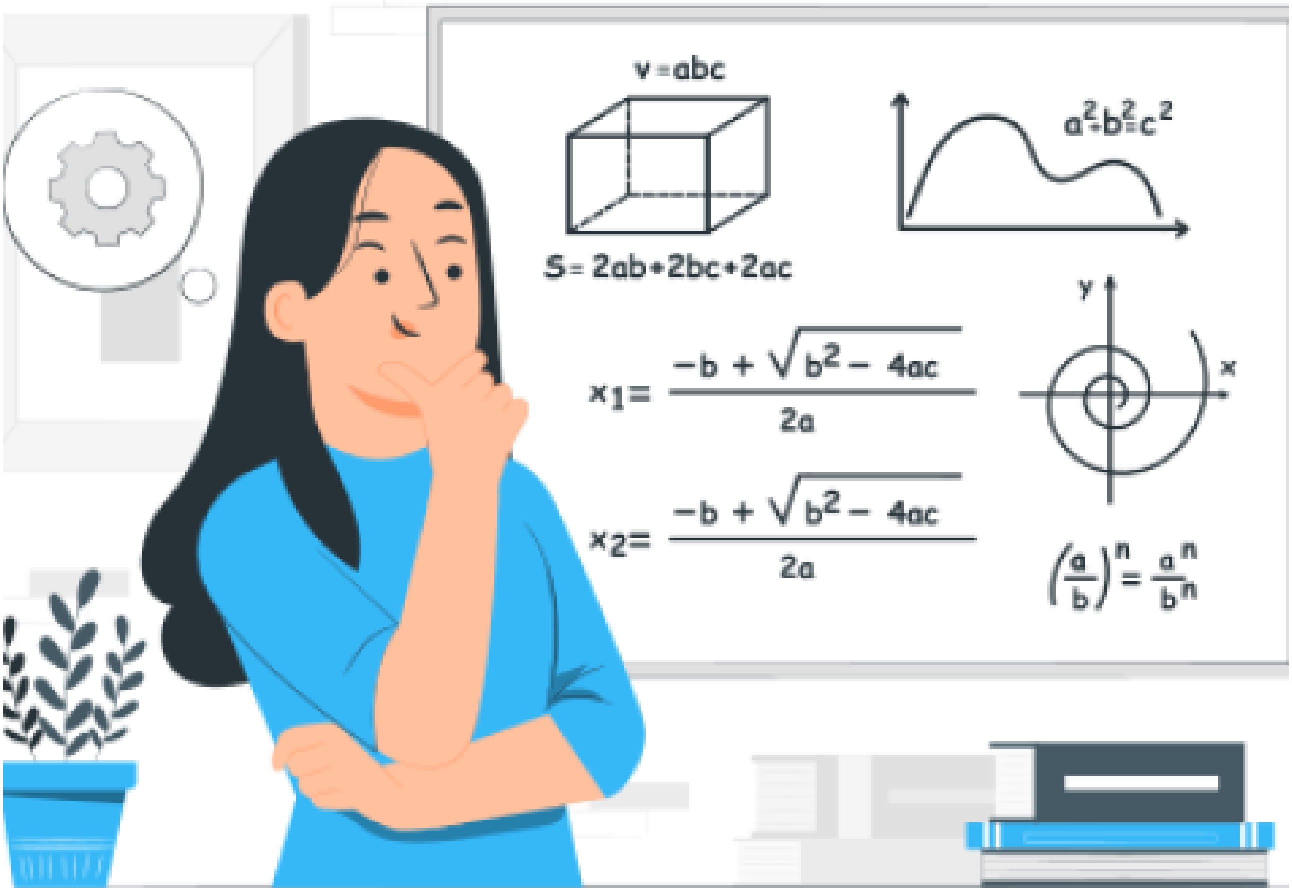


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022

Etapa II
Clasa a V-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Cinci prieteni au colecționat împreună 460 de jetoane. Mihai, care are cele mai multe jetoane, dă celorlalți 4 copii câte 4 jetoane și, astfel, numerele jetoanelor celor cinci copii sunt 5 numere naturale consecutive. Care este numărul maxim de jetoane pe care îl poate avea Mihai înainte de a da din ele prietenilor?

Demonstrație. Dacă $a-2$, $a-1$, a, $a+1$, $a+2$ sunt cele cinci numere consecutive care se obțin după ce se distribuie jetoanele, atunci $a-2+a-1+a+a+1+a+2=460 \iff 5\cdot a=460 \iff a=92$ și numerele sunt 90, 91, 92, 93, 94. Numărul maxim de jetoane pe care ar putea să îl aibă un copil înainte de distribuire este $94+16=\boxed{110}$.

Răspuns corect: $\boxed{110}$ .... $5p$

□

Problema 2

Care este numărul de trei cifre $\overline{abc}$ care verifică relația $\overline{abc}:a:b:c=5$?

Demonstrație. $\overline{abc}:a:b:c=5 \iff \overline{abc}=5\cdot a\cdot b\cdot c$. De aici rezultă că numărul $\overline{abc}\mid 5 \implies c\in\{0,5\}$. Dacă $c=0$ obținem că $\overline{ab0}=0$, situație care nu convine. Pentru $c=5$ obținem că $\overline{ab5}=25\cdot a\cdot b$. Cum $\overline{ab5}$ este număr impar rezultă că a și b sunt cifre impare. Mai mult, $\overline{ab5}\mid 25 \implies b=7$ și $\overline{a75}=175\cdot a$.

- pentru $a=1$ obținem $\overline{abc}=175$, care este soluție;
- pentru $a=3$ relația devine $375=175\cdot 3$, care nu convine;
- pentru $a=5$ rezultă $575=175\cdot 5$, nici aceasta nu convine;
- pentru $a\geq 7$ rezultatul înmulțirii este de 4 cifre.

Singurul număr natural de trei cifre care verifică relația este $\boxed{175}$.

Răspuns corect: $\boxed{175}$ .... $5p$

□

Problema 3

Pe o tablă este scris un număr natural. La fiecare mutare aveți voie să faceți una dintre următoarele două acțiuni:

- Ștergeți două cifre vecine ale numărului, dacă acestea sunt egale;
- Ștergeți o singură cifră a numărului, dacă nu are un vecin egal cu ea.

Obțineți astfel, ignorând eventualele spații libere create, fie un nou număr cu cifrele rămase, fie tabla goală. Care este numărul minim de mutări necesar pentru a face ca numărul 1234554321 să dispară de pe tablă?

Demonstrație. Pentru a obține tabla goală din cât mai puține mutări este optim ca la fiecare mutare să ștergem câte două cifre vecine egale, lucru care este posibil, așa cum este descris mai jos.

$$1234\cancel{5}\cancel{5}4321$$

$$123\cancel{4}\cancel{4}321$$

$$12\cancel{3}\cancel{3}21$$

$$1\cancel{2}\cancel{2}1$$

$$\cancel{1}\cancel{1}.$$

Numărul minim de mutări este $\boxed{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{5}$ 5p

□

Problema 4

Într-un mic sat situat de-a lungul râului Olt sunt 9 case aliniate. În fiecare casă locuiește cel puțin o persoană, iar dacă adunăm numărul de persoane care locuiesc în oricare două case vecine, obținem mereu un număr cel mult egal cu 6. Care este numărul maxim de persoane care locuiesc în sat?

Demonstrație. Vom nota cu $a_1, a_2, ..., a_9$ numărul de persoane din fiecare cele 9 case. Știm că fiecare dintre aceste numere este mai mare sau egal cu 1 și este cel mult 5 pentru că $a_i + a_{i+1} \leq 6$. Putem exprima numărul tuturor locuitorilor astfel:

$$2 \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_9) = (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + ... + (a_8 + a_9) + a_1 + a_9.$$

Dar $(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + ... + (a_8 + a_9) + a_1 + a_9 \leq 6 + 6 + ... + 6 + 5 + 5 = 6 \cdot 8 + 10 = 58$. Se pare că numărul maxim de persoane care locuiește în acel sat este 29. Este necesar să oferim și un exemplu pentru a dovedi că acest maxim se poate obține. Distribuția

$$5,\ 1,\ 5,\ 1,\ 5,\ 1,\ 5,\ 1,\ 5$$

oferă un model, ceea ce ne asigură că numărul maxim al locuitorilor este $\boxed{29}$.

Răspuns corect: $\boxed{29}$ 5p

□

Problema 5

Un șir de cifre începe cu secvența 3, 4, 2, 8, 6, 8, ,.... Cifrele șirului se obțin astfel: primele două cifre sunt 3 și 4, iar fiecare dintre următoarele cifre este ultima cifră a numărului obținut prin înmulțirea celor două cifre anterioare. Care este a 2022−a cifră a șirului?

Demonstrație. Ideea principală de rezolvare a unei astfel de probleme este de a găsi secvența care se repetă, care este lungimea și care sunt cifrele.
Aplicând regula de formare a șirului obținem 3, 4, 2, 8, 6, 8, 8, 4, 2,.... Prima cifră nu mai apare niciodată în șir, iar secvența care se repetă este 4, 2, 8, 6, 8, 8, de lungime 6. Pentru a afla a 2022−a cifră o eliminăm pe 3 și aflăm câte secvențe sunt scrise complet până acolo și care este poziția în secvență a cifrei de pe locul 2022. Cum $2021 = 6 \cdot 336 + 5$ rezultă că sunt 336 secvențe complete și al cincilea număr din secvență este cel căutat, adică $\boxed{8}$.

Răspuns corect: $\boxed{8}$ 5p

□

Problema 6

Spunem că două numere de trei cifre, a și b formează o *pereche interesantă*, dacă cea mai mică cifră a lui a este egală cu cea mai mică cifră a lui b și diferența dintre cea mai mare cifră a lui a și cea mai mare cifră a lui b este egală cu 8 (numerele 809 și 100 formează o *pereche interesantă*). Care este cel mai mare număr natural care este suma numerelor dintr-o *pereche interesantă*?

Demonstrație. Cele două numere dintr-o *pereche interesantă* sunt distincte pentru că cea mai mare cifră a lui a este mai mare decât cea mai mare cifră a lui b, mai mult cea mai mare cifră a lui b poate fi doar 1 pentru că diferența 8 o putem obține doar în două moduri, $8 = 8 - 0$ și $8 = 9 - 1$. Numărul b este format din trei cifre, deci cea mai mare cifră a lui nu poate fi 0 și singura variantă este că cea mai mare cifră a lui este 1. Așadar, numărul b este unul dintre numerele 100, 101, 110 sau 111. Suma maximă se obține pentru perechea $(991, 111)$ cu suma $\boxed{1102}$.

Răspuns corect: $\boxed{1102}$ .... $5p$

□

Problema 7

Maria colecționează fotografii cu sportivii preferați începând cu anul 2017. Până la sfârșitul fiecărui an ea reușește să adune atâtea fotografii câte avea la un loc în anteriorii doi ani. Dacă în 2021 avea 85 fotografii și în 2020 avea 51 de fotografii, câte fotografii a colecționat în anul 2018?

Demonstrație. Vom nota cu x_n numărul de fotografii colecționate până la sfârșitul anului n. Atunci, $x_{2021} = x_{2020} + x_{2019} \implies x_{2019} = x_{2021} - x_{2020} = 85 - 51 = 34$. Apoi, $x_{2020} = x_{2019} + x_{2018} \implies x_{2018} = x_{2020} - x_{2019} = 51 - 34 = 17$.
În anul 2018 Maria a colecționat $\boxed{17}$ fotografii.

Răspuns corect: $\boxed{17}$ .... $5p$

□

Problema 8

Andrei, Bogdan și Cristi joacă un joc de noroc. Jucătorul care pierde jocul plătește celorlalți doi câte o sumă de bani. Prima dată a pierdut Andrei, iar Bogdan și Cristi și-au dublat sumele inițiale. Apoi a pierdut Bogdan, iar Andrei și Cristi și-au dublat sumele pe care le aveau la sfârșitul primului joc. A treia oară a pierdut Cristi, iar Andrei și Bogdan și-au dublat sumele pe care le aveau până atunci. La sfârșitul jocului s-a constatat că fiecare jucător avea 24 RON. Ce sumă a avut Andrei la început?

Demonstrație.
Solutia I:

Runda	A	B	C
I	39	21	12
II	6	42	24
III	12	12	48
Final	24	24	24

Vom folosi metoda mersului invers. Se poate urmări foarte ușor în tabel cum se modifică sumele de bani ale celor trei copii după fiecare etapă.

- La final Andrei își dublează suma, adică avea 12 RON și Bogdan la fel tot 12 RON. Cristi avea în plus cât a dat celorlalți doi copii, adică $24 + 12 + 12 = 48$ RON.
- După etapa a doua Andrei își dublează suma, adică avea 6 RON înainte de această etapă și Cristi, care își dublează și el suma, avea 24 RON. Bogdan avea în plus cât a dat celorlalți doi copii, adică $12 + 6 + 24 = 42$ RON.
- După prima etapă Bogdan își dublează suma, adică avea 21 RON și Cristi, care își dublează și el suma, avea 12 RON. Andrei avea în plus cât a dat celorlalți doi copii, adică $6 + 21 + 12 = \boxed{39}$ RON.

Solutia II:
Facem tabelul cu suma fiecărui jucător după fiecare rundă.

Runda	A	B	C
I	$A - B - C = A_1$	$2B$	$2C$
II	$2A_1$	$2B - A_1 - 2C = B_1$	$4C$
III	$4A_1$	$2B_1$	$4C - 2A_1 - B_1$
Final	24	24	24

$$4A_1 = 24 \implies A_1 = 6$$
$$2B_1 = 24 \implies B_1 = 12$$
$$4C - 2A_1 - B_1 = 24 \implies 4C - 2 \cdot 6 - 12 = 24 \mid +24$$
$$4C = 48 \mid : 4$$
$$\boxed{C = 12}$$
$$2B - A_1 - 2C = B_1$$
$$2B - 6 - 2 \cdot 12 = 12 \mid +6 + 24$$
$$2B = 42 \mid : 2$$
$$\boxed{B = 21}$$
$$A - B - C = A_1$$
$$A - 21 - 12 = 6 \mid +21 + 12$$
$$\boxed{A = 39}$$

La începutul jocului Andrei avea $\boxed{39}$ RON.
Răspuns corect: $\boxed{39}$ 5p

□

Problema 9
Tricourile unei echipe sportive sunt numerotate cu numere naturale diferite. Antrenorul i-a aliniat în șir astfel încât la capătul din dreapta al rândului stă jucătorul cu numărul 72 și fiecare număr al oricărui alt membru din echipă divide numărul vecinului din dreapta sa. Care este numărul maxim de sportivi din echipă?

Demonstrație. Divizorii lui 72 sunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, și 72. Cel mai lung șir de numere în care fiecare este divizor pentru cel care urmează după el are $\boxed{6}$ numere.
Se pot găsi mai multe exemple: 1, 2, 4, 8, 24, 72 sau 1, 2, 6, 12, 36, 72 sau 1, 3, 9, 18, 36, 72.
Răspuns corect: $\boxed{6}$ 5p

□

Problema 10

Numerele naturale x și y sunt soluțiile ecuației $20 + 2^x + 3^x + 4^x + 5^x = \overline{yyyy}$. Care este valoarea sumei $x + y$?

Demonstrație. Pentru $x \leq 4$, $20 + 2^x + 3^x + 4^x + 5^x \leq 20 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 = 998 < 1111$. Dacă $x \geq 6$, deja $5^6 > 9999$. Rămâne $x = 5$, situație în care $20 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5 = 4444$. Soluția ecuației este $x = 5$, $y = 4$, iar suma lor este $x + y = \boxed{9}$.

Răspuns corect: $\boxed{9}$ .... $5p$

□

Problema 11

Câte numere naturale de forma $\overline{abcd}$ au proprietatea că $2 \cdot \overline{abcd} = \overline{cdab} + 3 \cdot \overline{ab}$?

Demonstrație. Egalitatea din enunț este echivalentă cu $200 \cdot \overline{ab} + 2 \cdot \overline{cd} = 100 \cdot \overline{cd} + 4 \cdot \overline{ab}$, adică cu $196 \cdot \overline{ab} = 98 \cdot \overline{cd}$, deci cu $\overline{cd} = 2 \cdot \overline{ab}$. Găsim câte o soluție pentru fiecare alegere a lui $\overline{ab}$ din mulțimea $\{10, 11, 12, ..., 49\}$, așadar sunt $\boxed{40}$ de soluții.

Răspuns corect: $\boxed{40}$ .... $5p$

□

Problema 12

Produsul vârstelor copiilor mei este 1664. Vârsta celui mai mare dintre copii este dublul vârstei celui mai mic. Câți copii am?

Demonstrație. Descompunerea în factori primi a numărului 1664 este $2^7 \cdot 13$. Pentru că 13 apare o singură dată, rezultă că vârsta fratelui mai mic și vârsta fratelui mai mare nu se divid cu 13 pentru că atunci vârsta fratelui mai mic ar fi $13 \cdot k$ și vârsta fratelui mai mare ar fi $2 \cdot 13 \cdot k$, adică produsul tuturor vârstelor ar fi divizibil cu 13^2, ceea ce nu este posibil. Unul dintre frații mijlocii are vârsta cel puțin egală cu 13, deci vârsta fratelui mai mare este mai mare strict decât 13. Mai mult, cele două vârste (al celui mai mic și al celui mai mare dintre copii) sunt puteri ale lui 2, una fiind dublul celeilalte. Analizăm următoarele cazuri:

- Dacă cel mai mic ar avea vârsta $1 = 2^0$, atunci cel mai mare ar avea vârsta 2 și nu convine pentru că este mai mică decât 13.
- Dacă cel mic ar avea 2 ani atunci cel mai mare ar avea 4 ani, iarăși nu convine.
- Dacă cel mai mic ar avea $2^2 = 4$ ani, atunci cel mai mare ar avea $2^3 = 8$ ani, iarăși nu convine.
- Singura situație posibilă este ca cel mic să aibă $2^3 = 8$ ani și cel mai mare $2^4 = 16$ ani.

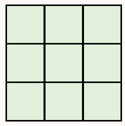
Numărul copiilor este $\boxed{3}$.

Răspuns corect: $\boxed{3}$ .... $5p$

□

Problema 13

În fiecare dintre pătrățelele pătratului din imaginea de mai jos, Andrei scrie toate cifrele de la 1 la 9. Apoi calculează suma numerelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană și obține 6 numere. Cinci dintre numerele pe care le-a obținut sunt 13, 14, 15, 16 și 17. Care este cel de-al șaselea număr pe care l-a obținut Andrei?



Demonstrație. Fiecare număr se adună de două ori: o dată pe linia din care face parte și o dată pe coloana din care face parte. Când adunăm cele șase rezultate pe care le obține Andrei, adunăm fiecare număr de două ori. Notăm cu x valoarea celei de-a șasea sume și avem de rezolvat ecuația $2 \cdot (1+2+3+...+9) = 13+14+15+16+17+x \iff 90 = 75 + x \iff x = \boxed{15}$. Un exemplu de aranjare a numerelor pentru care este posibil sa obținem aceste sume este descris în tabelul de mai jos.

7	4	2	13
1	5	9	15
8	6	3	17
16	15	14	

Răspuns corect: $\boxed{15}$ 5p

□

Problema 14

Câte numere naturale de două cifre $\overline{ab}, a > b, b$ diferit de 0, au proprietatea că

$$\overline{ab} - \overline{ba} = (a-b)^3?$$

Mihaela Berindeanu

Demonstrație.

Soluția I:

$\overline{ab} - \overline{ba} = (a-b)^3 \iff (10a+b) - (10b+a) = (a-b)^3 \iff 9(a-b) = (a-b)^3 \iff (a-b)(9-(a-b)^2) = 0.$

Cum $a > b$, obținem că $a - b$ nu poate fi egal cu 0, prin urmare $9 = (a-b)^2 \iff a - b = 3$. Numerele $\overline{ab}$ care satisfac această ecuație sunt 41, 52, 63, 74, 85 și 96, și sunt în total $\boxed{6}$ numere.

Soluția II:

Numărul $\overline{ab} - \overline{ba}$ este un număr de cel mult două cifre, adică $(a-b)^3$ este cub perfect de cel mult două cifre. Acestea sunt $0 = 0^3$, $1 = 1^3$, $8 = 2^3$, $27 = 3^3$ și $64 = 4^3$. Pe de altă parte, $\overline{ab}$ și $\overline{ba}$ au aceeași sumă a cifrelor, deci dau același rest la împărțirea cu 3 și diferența lor este divizibilă cu 3. Rămâne ca singură variantă posibilă $a - b = 3$. Numerele $\overline{ab}$ care satisfac această ecuație sunt 41, 52, 63, 74, 85 și 96 și sunt în total $\boxed{6}$ numere.

Răspuns corect: $\boxed{6}$ 5p

□

Problema 15

Care este cel mai mare număr natural $\overline{abc}$ pentru care există un număr natural nenul n, astfel încât are loc relația:

$$\overline{abc} + a + b + c = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Demonstrație. Este util să cunoaștem valorile lui $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, pentru primele valori naturale nenule ale lui n.
$1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$. Prin urmare, avem de analizat două cazuri, când $n = 5$ și $n = 6$.

- Pentru $n = 5$ relația devine $\overline{abc} + a + b + c = 120$, de unde obținem că $a = 1$ și rescriem $\overline{1bc} + 1 + b + c = 120 \mid -101 \iff \overline{bc} + b + c = 19 \iff 11b + 2c = 19$ cu soluția $b = 1$ și $c = 4$, iar $\overline{abc} = 114$.

- Pentru $n = 6$ relația devine $\overline{abc} + a + b + c = 720$. Cum $a + b + c \leq 27 \implies \overline{abc} \geq 720 - 27 = 693$, deci a poate fi 6 sau 7.

  ◦ Dacă $a = 6$ obținem $\overline{6bc} + 6 + b + c = 720 \mid -606 \implies \overline{bc} + b + c = 114 \implies 11b + 2c = 114$. Din această ultimă relație observăm că b este cifră pară, dar pentru cea mai mare dintre ele, adică $b = 8$ nu obținem soluție pentru că cea mai mare valoare pe care o poate lua $11b + 2c$ este $11 \cdot 8 + 2 \cdot 9 = 106 < 114$.

  ◦ Dacă $a = 7$ relația se rescrie $\overline{7bc} + 7 + b + c = 720 \mid -707 \implies \overline{bc} + b + c = 13 \implies 11b + 2c = 13$, care are soluția $b = 1, c = 1$, iar $\overline{abc} = 711$.

Cel mai mare dintre numerele care sunt soluții ale relației date este $\boxed{711}$.

Răspuns corect: $\boxed{711}$ .... $5p$

□

Problema 16

Într-un rând sunt 120 de scaune, unele dintre ele fiind deja ocupate atunci când vine Andrei. Acesta observă că oriunde ar vrea să se așeze nu poate să o facă astfel încât scaunele vecine din stânga și din dreapta lui să fie ambele libere. Care este cel mai mic număr de scaune care erau deja ocupate când a venit Andrei?

Demonstrație. Împărțim scaunele în 40 de grupe de câte trei scaune vecine. Dacă există un grup în care toate scaunele sunt neocupate, Andrei se poate așeza pe scaunul din mijloc fără a avea un scaun vecin ocupat. Așadar, situația din enunț este posibilă numai dacă în fiecare grup de trei scaune se află măcar un scaun ocupat, adică dacă sunt măcar 40 de scaune ocupate. Pe de altă parte, 40 de persoane așezate în scaunul din mijloc al fiecărui grup sunt suficiente pentru a face ca oricare altă persoană care dorește să se așeze să trebuiască să o facă lângă un scaun deja ocupat. Minimul căutat este $\boxed{40}$.

Răspuns corect: $\boxed{40}$ .... $5p$

□

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 3 ore