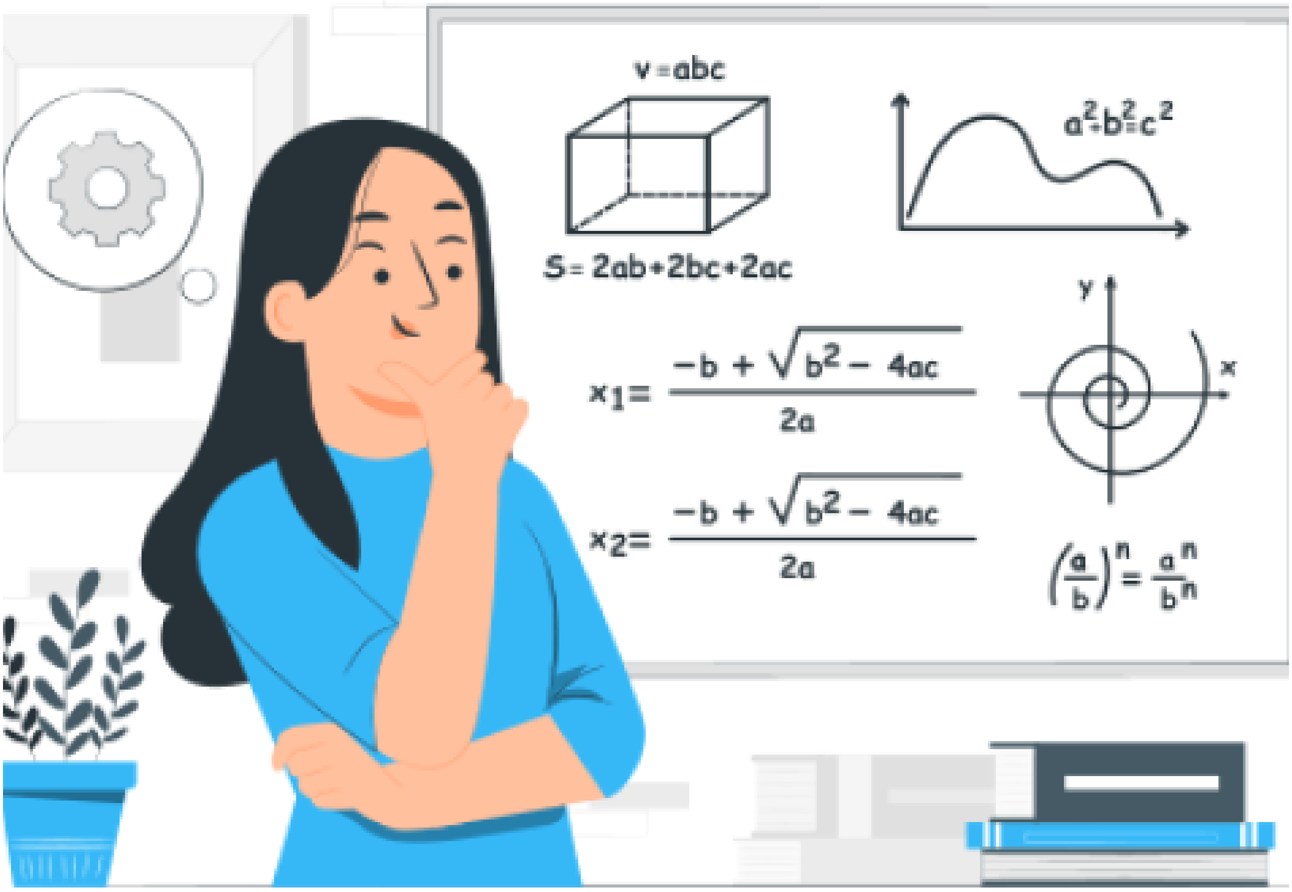


Concursul de matematică Upper.School
Ediția 2022

Etapa II
Clasa a VI-a

- Soluții -
Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Numărul natural n este cel mai mic care verifică egalitatea $7 \cdot n^5 = 11 \cdot k$, unde k este număr natural nenul. Numărul divizorilor pozitivi ai numărului k este egal cu:

Demonstrație. $7 \cdot n^5 = 11 \cdot k \implies 11 \mid n^5$, dar 11 este prim, de unde rezultă că $11 \mid n$. Cum n este cel mai mic posibil și este diferit de 0, înseamnă că $n = 11$. Înlocuim în relație și obținem $7 \cdot 11^5 = 11 \cdot k \implies k = 7 \cdot 11^4$.
$\mathcal{D}_k = \{1,\ 7,\ 11,\ 11^2,\ 11^3,\ 11^4,\ 7 \cdot 11,\ 7 \cdot 11^2,\ 7 \cdot 11^3,\ 7 \cdot 11^4\}$. Numărul k are $\boxed{10}$ divizori.
Răspuns corect: $\boxed{10}$ 5p

□

Problema 2

Un număr natural se numește *săltăreț*, dacă este scris doar cu două cifre distincte, care alternează. De exemplu, 2020 este număr *săltăreț*, dar 2002 nu este *săltăreț*. Câte numere de 4 cifre *săltărețe* sunt divizibile cu 15?

Demonstrație. Căutăm numerele de forma $\overline{abab}\vdots 15$. Cum $5 \mid 15 \implies 5 \mid \overline{abab} \implies b \in \{0, 5\}$.

- Pentru $b = 0$ numărul devine $\overline{a0a0}$. Cum $3 \mid 15 \implies 3 \mid \overline{a0a0} \implies 3 \mid 2a$. Pentru că $(2, 3) = 1 \implies 3 \mid a \implies a \in \{3, 6, 9\}$. Am găsit până acum 3 numere *săltărețe*.
- Pentru $b = 5$ numărul devine $\overline{a5a5}$. Cum $3 \mid 15 \implies 3 \mid \overline{a5a5} \implies 3 \mid 2a + 10 \implies 3 \mid 2a + 1$. Obținem $a \in \{1, 4, 7\}$, deci încă 3 numere *săltărețe*.

Așadar, $\boxed{6}$ numere naturale de 4 cifre divizibile cu 15 sunt *săltărețe*.
Răspuns corect: $\boxed{6}$ 5p

□

Problema 3

Luca a economisit în vacanța de vară 32 de euro, cu care vrea să își cumpere la începutul anului școlar 12 pixuri, cel puțin câte unul dintre următoarele trei sortimente: de 1 euro, de 3 euro sau de 5 euro bucata. Câte pixuri de 5 euro a luat Luca, știind că a ales să cumpere din acest sortiment numărul maxim posibil.

Mihaela Berindeanu

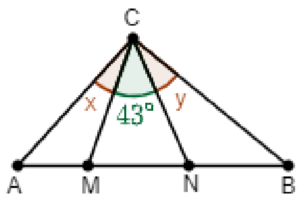
Demonstrație. Vom nota cu $x + 1$ numărul de pixuri de 1 euro pe care și le cumpără Luca, cu $y + 1$ numărul de pixuri de 3 euro pe care și le cumpără Luca și cu $z + 1$ numărul de pixuri de 5 euro. Am făcut această alegere pentru că din fiecare sortiment de pixuri copilul își cumpără cel puțin câte unul, numerele x, y, z putând fi (unele dintre ele) chiar egale cu 0.
Avem relațiile $x+1+y+1+z+1 = 12 \iff x+y+z = 9$ și $x+1+3(y+1)+5(z+1) \leq 32 \iff x + 3y + 5z \leq 23$. Din ultima relație scădem $x + y + z$ și obținem $2y + 4z \leq 14 | : 2 \iff y + 2z \leq 7$. Numărul z ia valoarea maximă 3, caz în care se atinge egalitatea pentru $y = 1$, (adică Luca cheltuie toți banii) și numărul maxim de pixuri de 5 euro pe care le poate cumpăra este $\boxed{4}$.
Răspuns corect: $\boxed{4}$ 5p

□

Problema 4

În triunghiul $\triangle ABC$ punctele M și N se află în interiorul segmentului (AB), astfel încât $M \in (AN)$, $AC = AN$ și $BM = BC$. Dacă $m(\angle MCN) = 43°$, care este măsura unghiului $\angle ACB$?

Demonstrație. Vom nota cu $x = m(\angle ACM)$ și cu $y = m(\angle NCB)$.
$AC = AN \implies \triangle ACN$ este isoscel și $m(\angle ANC) = m(\angle ACN) = x + 43°$.
$BC = BM \implies \triangle BCM$ este isoscel și $m(\angle BMC) = m(\angle BCM) = y + 43°$.
În $\triangle MNC$ suma măsurilor unghiurilor este $180° \implies m(\angle MCN) + m(\angle MNC) + m(\angle NMC) = 180° \iff 43° + 43° + x + 43° + y = 180° \iff x + y = 51°$ și $m(\angle ACB) = 43° + x + y = \boxed{94°}$.



Răspuns corect: $\boxed{94}$ .... $5p$

□

Problema 5

Cățelușa Heidi are trei tipuri de meniuri pe care le poate consuma într-o zi. Primul este compus din 9 oase, al doilea din 4 oase și o conservă și al treilea din 2 conserve. Săptămâna trecuta ea a ronțăit 35 de oase. Câte conserve a avut Heidi în meniu săptămâna trecută?

Mihaela Berindeanu

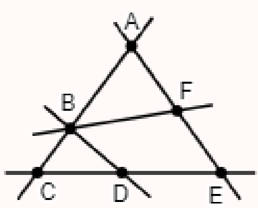
Demonstrație. Notăm cu x numărul de zile cu meniul cu 9 oase și y numărul de zile cu 4 oase și o conservă. Avem $9x + 4y = 35$. Cum $9x \leq 35 \implies x \in \{0, 1, 2, 3\}$. În plus x este impar, deci $x \in \{1, 3\}$. Pentru $x = 1$ avem $4y = 26$, imposibil. Pentru $x = 3$ avem $4y = 8$, deci $y = 2$. Cum săptămâna are 7 zile, vom avea timp de $7 - 3 - 2 = 2$ zile meniul cu 2 conserve pe zi. Prin urmare, avem $2 \cdot 2 + 2 = \boxed{6}$ conserve în meniul din această săptămână.

Răspuns corect: $\boxed{6}$ .... $5p$

□

Problema 6

În desenul de mai jos atribuim fiecărui punct notat cu A, B, C, D, E, respectiv F o cifră de la 1 la 6. Nu există două puncte distincte care să aibă atribuită aceeași cifră. Se calculează suma numerelor pe fiecare linie, obținându-se 5 astfel de sume. Suma totală a acestor sume este 47. Care este numărul atribuit punctului B?



Demonstrație. Fiecare punct, cu excepția lui B aparține la două drepte și numărul care i-a fost atribuit se adună de câte două ori în cele 5 sume. Punctul B aparține la trei drepte, deci se adună de trei ori. Suma celor 5 sume este, de fapt, de două ori suma numerelor 1, 2, 3, 4, 5, 6 plus valoarea atribuită punctului B. Notăm cu b acest număr și obținem $b + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 47 \iff b + 2 \cdot 21 = 47 \iff b = \boxed{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{5}$ 5p

□

Problema 7

Care este cea mai mare valoare a numărului natural $\overline{ab}$ pentru care are loc egalitatea $\frac{\overline{aa}}{b} + \frac{\overline{bb}}{a} = \frac{\overline{aa} + \overline{bb}}{a \cdot b}$, unde a și b sunt nenule?

Demonstrație. Relația se scrie $11 \cdot \frac{a}{b} + 11 \cdot \frac{b}{a} = 11 \cdot \frac{a+b}{ab}$, adică $\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a+b}{ab} \iff a^2 + b^2 = a + b$. Cum $a^2 > a$ și $b^2 > b$ atunci când a și b sunt mai mari decât 1, egalitatea are loc doar pentru $a = b = 1$. Există un singur număr $\overline{ab}$ care verifică relația din enunț și acesta este $\boxed{11}$.

Răspuns corect: $\boxed{11}$ 5p

□

Problema 8

Care este diferența pozitivă a cifrelor nenule x și y care verifică relația $\overline{xx}^2 + \overline{yy}^2 = \overline{xxyy}$?

Prin diferența pozitivă a cifrelor x și y înțelegem diferența dintre cea mai mare și cea mai mică cifră.

Demonstrație. Relația se rescrie $(11x)^2 + (11y)^2 = \overline{xx00} + \overline{yy} \iff (11x)^2 + (11y)^2 = \overline{xx} \cdot 100 + \overline{yy} \iff (11x)^2 + (11y)^2 = 11 \cdot x \cdot 100 + 11 \cdot y \iff 11^2 \cdot (x^2 + y^2) = 11 \cdot (100 \cdot x + y) = 11^2 \cdot (x^2 + y^2) = 11 \cdot \overline{x0y} \iff 11(x^2 + y^2) = \overline{x0y}$. Deducem că $11 \mid \overline{x0y}$. Conform criteriului de divizibilitate cu 11 trebuie ca $11 \mid (x + y)$, dar $0 < x + y \leq 18$, așa încât $x + y = 11$.
Încercăm să mai eliminăm din cele 9 cazuri și rescriem ecuația astfel: $11x^2 + 11y^2 = 100x + y \iff 11x^2 + 11y^2 = 99x + x + y \iff 11x^2 + 11y^2 = 99x + 11 \iff x^2 + y^2 = 9x + 1$. Observăm că x^2 și $9x$ au aceeași paritate, de unde rezultă că y^2 este impar, adică y este impar. Rămân de verificat perechile $(2, 9)$, $(4, 7)$, $(6, 5)$, și $(8, 3)$. Singura soluție este $x = 8$, $y = 3$, iar diferența lor pozitivă este $x - y = \boxed{5}$.

Răspuns corect: $\boxed{5}$ 5p

□

Problema 9

Se consideră unghiul $\angle AOB$ a cărui măsură este de $96°$. Se construiește bisectoarea sa, apoi la cele două unghiuri noi formate se construiesc bisectoarele, apoi la cele patru unghiuri noi formate se construiesc bisectoarele, etc. Construcția se repetă atâta timp cât unghiurile noi formate au măsura un număr natural. Numărul de semidrepte care se află în interiorul unghiului $\angle AOB$ la finalul acestor operații este egal cu:

Demonstrație. Descriem mai jos modificările care se produc la fiecare etapă.

1) Avem un unghi de $96°$ și vom construi o bisectoare;

2) Avem două unghiuri de $48°$ și vom construi două bisectoare;

3) Avem 4 unghiuri de $24°$ și vom construi 4 bisectoare;

4) Avem 8 unghiuri de $12°$ și vom construi 8 bisectoare;

5) Avem 16 unghiuri de $6°$ și vom construi 16 bisectoare.

Cele 32 de unghiuri formare după ultima etapă au câte $3°$ și construcția nu mai poate continua. Când numărăm semidreptele din interiorul unghiului nu numărăm și laturile unghiului. Numărul de semidrepte care se află în interiorul unghiului $\angle AOB$ la finalul operațiilor este $1+2+4+8+16 = \boxed{31}$.

Răspuns corect: $\boxed{31}$ .... $5p$

□

Problema 10

Se consideră în plan 10 puncte distincte. Care este numărul minim de puncte coliniare, dacă ele determină 40 de drepte distincte?

Demonstrație. Se știe că, dacă avem n puncte, oricare trei necoliniare, numărul dreptelor determinate de acestea este $\frac{n(n-1)}{2}$. Dacă cele 10 puncte ar fi necoliniare, oricare trei, atunci numărul dreptelor ar fi 45. Pentru 3 puncte coliniare numărul de drepte scade cu 2, numărul de drepte lipsă din cele 45 este 5, adică număr impar, prin urmare, dacă ar fi doar grupuri de câte 3 puncte coliniare, atunci nu se poate ajunge la 40, care este număr par.
Patru puncte necoliniare, oricare trei, determină 6 drepte distincte. Dacă cele 4 puncte sunt coliniare, atunci dispar 5 dintre cele 6 drepte pentru că toate 6 sunt înlocuite de una singură. Numărul punctelor coliniare este $\boxed{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{4}$ .... $5p$

□

Problema 11

Când Andrei nu se descurcă cu temele la matematică, cere ajutor prietenilor săi pe Discord. Acum trebuie să afle suma tuturor resturilor posibile pentru împărțirea $(10^n - 1) : 37$, când $n \in \mathbb{N}$. Bianca i-a trimis rezolvarea imediat. Tu știi care este rezultatul corect?

Mihaela Berindeanu

Demonstrație. Plecăm de la observația $1000 = 999 + 1 = 37 \cdot 27 + 1 = M_{37} + 1$. Pentru $n = 0$, avem $10^0 - 1 = 0$, deci restul împărțirii este 0

- Pentru $n = 3k$, avem $10^n - 1 = 1000^k - 1 = (M_{37} + 1)^k - 1 = M_{37}$, deci restul este 0.
- Pentru $n = 3k + 1$, avem $10^n - 1 = 10 \cdot 1000^k - 1 = 10 \cdot (M_{37} + 1)^k - 1 = M_{37} + 9$, deci restul este 9.
- Pentru $n = 3k+2$, avem $10^n - 1 = 100 \cdot 1000^k - 1 = 100 \cdot (M_{37}+1)^k - 1 = M_{37}+99 = M_{37}+25$, deci restul este 25.

Prin urmare, suma resturilor este $0 + 9 + 25 = \boxed{34}$.

Răspuns corect: $\boxed{34}$ .... $5p$

$\square$

Problema 12

Numerele naturale m și n au proprietatea că numărul $A = \dfrac{3m+2}{2m+1} + \dfrac{5n+12}{2n+5}$ este număr natural. Care este valoarea numărului A?

Demonstrație. $A = \dfrac{3m+2}{2m+1} + \dfrac{5n+12}{2n+5} = \dfrac{2m+1}{2m+1} + \dfrac{m+1}{2m+1} + \dfrac{4n+10}{2n+5} + \dfrac{n+2}{2n+5} = 1 + \dfrac{m+1}{2m+1} + 2 + \dfrac{n+2}{2n+5} = 3 + \dfrac{m+1}{2m+1} + \dfrac{n+2}{2n+5}$. Valoarea maximă pe care o ia fracția $\dfrac{m+1}{2m+1}$ este $\dfrac{2}{3}$ și se obține pentru $m = 1$. Pe de altă parte $\dfrac{n+2}{2n+5} \leq \dfrac{1}{2}$. Așadar cea mai mare valoare pe care o ia suma celor două fracții este $\dfrac{7}{6}$ și, cum suma lor este număr natural, rezultă ca singura valoare posibilă este 1. Haideți să ne asigurăm că acest lucru se poate realiza. Vom căuta perechile de numere (m,n) pentru care $\dfrac{m+1}{2m+1} + \dfrac{n+2}{2n+5} = 1 \iff (m+1)(2n+5) + (2m+1)(n+2) = (2m+1)(2n+5) \iff 2mn + 5m + 2n + 5 + 2mn + 4m + n + 2 = 4mn + 10m + 2n + 5 \iff m = n + 2$. Așadar, pentru orice pereche $(n+2, n)$ se obține valoarea căutată. Valoarea numărului A este egală cu $\boxed{4}$.

Răspuns corect: $\boxed{4}$ .... $5p$

$\square$

Problema 13

Determinați numărul $\overline{abcd}$ care verifică relațiile $\dfrac{c+d}{a+c} = \dfrac{a}{c}$ și $\overline{ab} + \overline{cd} = 35$.

Demonstrație. În primul rând observăm că cifrele a și c sunt nenule întrucât apar pe prima poziție în scrierea zecimală a numerelor $\overline{ab}$ și $\overline{cd}$. Mai mult, din a doua condiție se observă că $a + c \in \{2, 3\}$.

- Pentru $a + c = 2$ avem o singură variantă $a = 1$ și $c = 1$. Atunci $\dfrac{c+d}{a+c} = \dfrac{a}{c} \iff \dfrac{1+d}{2} = \dfrac{1}{1} \iff d = 1$. Dar din a doua relație obținem $10(a+c) + b + d = 35 \iff 20 + b + d = 35 \iff b + d = 15$ și de aici $b = 14$, care nu convine ca soluție pentru că b este cifră.
- Pentru $a + c = 3$ avem două situații:
  ◦ $a = 1$ și $c = 2 \implies \dfrac{2+d}{3} = \dfrac{1}{2} \iff 4 + 2d = 3$, care nu are soluție.
  ◦ $a = 2$ și $c = 1 \implies \dfrac{1+d}{3} = 2 \iff 1 + d = 6 \iff d = 5$. A doua relație devine $b + d = 5$, de unde $b = 0$.

Unica soluție este $\overline{abcd} = \boxed{2015}$.

Răspuns corect: $\boxed{2015}$ .... $5p$

$\square$

Problema 14

Formăm toate fracțiile care au numărătorul și numitorul din mulțimea $\{n, n+1, n+2\}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Care este produsul numerelor n, $n+1$ și $n+2$, știind că suma tuturor fracțiilor formate este un număr natural.

Demonstrație. Fracțiile echiunitare sunt numere naturale așa încât nu le luăm în discuție. Suma celorlalte fracții este $\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+2}+\frac{n+1}{n}+\frac{n+1}{n+2}+\frac{n+2}{n}+\frac{n+2}{n+1}=\frac{2n+2}{n+1}+\frac{2n+1}{n+2}+\frac{n}{n}+\frac{1}{n}+\frac{n}{n}+\frac{2}{n}=4+\frac{2n+4}{n+2}-\frac{3}{n+2}+\frac{3}{n}=6+\frac{6}{n(n+2)} \in \mathbb{N}^*$. De aici obținem că

$$n(n+2) \in \mathcal{D}_6 \implies n=1$$

este soluția unică. Produsul numerelor n, $n+1$ și $n+2$ este $\boxed{6}$.

Răspuns corect: $\boxed{6}$ .... $5p$

□

Problema 15

Fie A mulțimea fracțiilor zecimale de forma $\overline{0,a_1a_2a_3\ldots}$ pentru care $a_k+a_{k+3}=9$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Câte elemente de forma $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, conține mulțimea A?

Demonstrație. Cum $a_k+a_{k+3}=9=a_{k+3}+a_{k+6}$, avem $a_k=a_{k+6}$, deci zecimalele oricărui număr din A sunt periodice de perioadă cel mult 6. Așadar, ele sunt numere raționale. Dacă $\frac{1}{n} \in A$, există $\overline{abcdef}$, unde a poate fi 0, astfel încât

$$\frac{1}{n}=\frac{\overline{abcdef}}{999999} \iff \frac{999999}{n}=\overline{abcdef}$$

și $a+d=b+e=c+f=9$. Altfel spus, $\overline{abc}+\overline{def}=999$, deci $\overline{def}=999-\overline{abc}$. Introducând în relație obținem

$$\frac{999999}{n}=1000\overline{abc}+999-\overline{abc}=999(\overline{abc}+1) \iff \frac{1001}{n}=\overline{abc}+1 \in \mathbb{N}.$$

Astfel, $n \mid 1001=7\cdot 11\cdot 13$, deci $n \in \{1,7,11,13,77,91,143,1001\}$. Dintre aceste valori 1 nu convine ca soluție pentru că numărul $\frac{1}{1}$ este natural, adică nu este fracție periodică. Numărul fracțiilor de forma $\frac{1}{n}$ din mulțimea A este $\boxed{7}$.

Răspuns corect: $\boxed{7}$ .... $5p$

□

Problema 16

Spunem despre fracția nenulă $\frac{a}{b}$ că se numește *specială*, dacă $a+b=15$, nu neapărat prime între ele. Câte numere naturale se pot scrie ca suma a două fracții *speciale*, nu neapărat diferite?

Demonstrație. Fracțiile *speciale* sunt

$$\frac{1}{14}, \frac{2}{13}, \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \frac{4}{11}, \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \frac{7}{8}, \frac{8}{7}, \frac{9}{6} = \frac{3}{2}, \frac{10}{5} = 2, \frac{11}{4}, \frac{12}{3} = 4, \frac{13}{2}, \frac{14}{1} = 14.$$

Ca suma a două fracții *speciale* să fie număr natural trebuie ca părțile lor fracționare să aibă suma 0 sau 1. Părțile fracționare ale acestor fracții sunt, în ordine,

$$\frac{1}{14}, \frac{2}{13}, \frac{1}{4}, \frac{4}{11}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{2}, 0.$$

Combinațiile care convin sunt $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ și $0 + 0$. Găsim astfel soluțiile:

$$\frac{1}{4} + \frac{11}{4} = 3$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

$$\frac{1}{2} + \frac{13}{2} = 7$$

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

$$\frac{3}{2} + \frac{13}{2} = 8$$

$$\frac{13}{2} + \frac{13}{2} = 13$$

$$2 + 2 = 4$$

$$2 + 4 = 6$$

$$2 + 14 = 16$$

$$4 + 4 = 8$$

$$4 + 14 = 18$$

$$14 + 14 = 28.$$

Numerele căutate sunt $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 13, 16, 18, 28$, în total $\boxed{11}$.

Răspuns corect: $\boxed{11}$ .... $5p$

□

Problemele 1-16: .... $16 \times 5p = 80p$
Puncte acordate din oficiu: .... $20p$
Total: .... $100p$

Timp de lucru: .... 3 ore